देने से योगमूल होगा और उनके वर्ग में अपने अपने क्षेप को घटा देने से, उन दोनों राशियों का योग और अन्तर होगा। बाद में संक्रमण सूत्र से राशि मिलेंगे। इस से 'सरूपमव्यक्तमरूपकं वा—' यह सूत्र उपपन्न हुआ।

विशेष—

यहाँ वर्गान्तर का स्वरूप—याव. काव १ याव. क्षे १ काव. क्षे १ क्षेव १ है। इस में यदि याव. क्षे १ काव. क्षे १ याका क्षे २ इस क्षेप को जोड़ देते हैं तो, या. का १ क्षे १ यह मूल आता है। वह क्षेपयुत मूलघात है, इसलिये याव. क्षे १ काव. क्षे १ याका क्षे २ यह भी वर्गान्तर क्षेप है। इस में क्षे १ का भाग देने से, याव १ काव १ याका २ आया। इसका मूल या १ का १ है। यह मूल योग के तुल्य है, परन्तु ऐसा आचार्य ने नहीं कहा है।

कल्पना किया कि ६। ८ राशि हैं। इन का योग १४ और अन्तर २ क्षेप २ जोड़ने से १६।४ हुआ, इसका मूल ४ और २ आया। इन का मान या १ का १ कल्पना किया। अब मूलान्तर २ के वर्ग ४ को क्षेप २ से गुण देने से ८ हुआ। इस को आचार्य ने वर्गान्तर क्षेप कहा है। क्योंकि राशियों ६। ८ के वर्गों ३६।६४ का अन्तर २८ में स्वक्षेप ८ जोड़ देने से ६ मूल आता है। इसी भाँति मूलों २।४ के योग ६ का वर्ग ३६ क्षेप २ से गुणित ७२ हुआ। इस में वर्गान्तर २८ जोड़ देने से १०० हुआ, यह मूलप्रद है। परन्तु ७२ इस क्षेप को ग्रन्थकार ने नहीं स्वीकार किया है।

उदाहरणम्—

राश्योर्योगवियोगकौ त्रिसहितौ वर्गौ भवेतां ययोर्वर्गैक्यं चतुरूनितं रवियुतं वर्गान्तरं स्यात्कृतिः। साल्यं घातदलं घनः पदयुतिस्तेषां

द्वियुक्ता कृतिस्तौ राशी वद कोमलामलमते षट्सप्त हित्वा परौ ॥ ६५ ॥

अत्र रूपोनमव्यक्तं वियोगमूलं प्रकल्प्य या १ रू १̇ अत्राप्यनयैव युक्त्या कल्पितौ राशी याव १ रू २̇ । या २ । वा कल्पितौ राशी याव १ या २ रू १̇ । या २ रू २ । राश्योर्योगस्त्रिसहितः याव १ या २ रू १ राश्योरन्तरं त्रिसहितं याव १ या २̇ रू १ । प्रथमराशिवर्गः यावव १ याव ४̇ रू ४ । द्वितीयराशिवर्गः याव ४ अनयोरैक्यं चतुरूनं यावव १ तयोरेवान्तरं रवियुतम् यावव १ याव ८ रू १६ राशिघातः याघ २ या ४̇ दलं याघ १ या २̇ साल्यं याघ १ एभ्यो मूलानि तत्र त्रियुतयोगमूलम् या १ रू १ रवियुतवर्गान्तरमूलम् याव १ रू ४̇ तथा घनमूलम् या १ पदपञ्चकयोगो द्वियुतो जातः याव २ या ३ रू २̇ एष वर्ग इति कालकवर्गेण समीकरणाय न्यासः ।

याव २ या ३ काव ० रू २̇
याव ० या ० काव १ रू ०

समीकरणात्पक्षशेषौ

याव २ या ३

काव १ रू २

अत्रैतावद्भिः संगुण्य नव रूपाणि प्रक्षिप्याद्यपक्षस्य मूलम् या ४ रू ३ परपक्षस्यास्य काव ४ रू २५ वर्गप्रकृत्या मूले

क ५ । ज्ये १५ ।

वा, क १७५ । ज्ये ४९५ ।

ज्येष्ठं प्रथमपक्षमूलसमं कृत्वाप्तं यावत्तावन्मानम् ३ । वा १२३ वर्गेणाद्यं केवलेनान्त्यमुत्थाप्य जातौ राशी ७।६।वा।१५१२७।२४६

अथवा । कल्पितद्वितीयराश्योर्योगस्त्रियुतः याव १ या ४ रू ४ वियोगस्त्रियुतः याव १ अत्राद्यवर्गः 'यावव १ याघ ४ याव २ या ४ रू १' द्वितीयराशिवर्गः 'याव ४ या ८ रू ४' अनयोरैक्यं चतुरूनं 'यावव १ याघ ४ याव ६ या ४ रू १' वर्गान्तरं रवियुतं 'यावव १ याघ ४ याव २̇ या १ २̇ रू ९' राशिघातः 'याघ २ याव ६ या २ रू २̇' दलं 'याघ १ याव ३

या १ रू १̇' साल्य 'याघ १ याव ३̇ या ३̇ रू १' एभ्यो मूलानि तत्र त्रियुतयोगमूलम् या १ रू २ त्रियुतवियोगमूलम् या १ चतुरूनित-वर्गैक्यमूलम् याव १ या २ रू १ रवियुत-वर्गान्तरमूलम् याव १ या २ रू ३̇ घनमूलम् 'या १ रू १' पदपञ्चकयोगो द्वियुक्तः याव २ या ७ रू ३̇ एष वर्ग इति कालकवर्गेण समी-करणाय न्यासः ।

या २ या ७ काव० रू ३̇

या ० या ० काव १ रू०

समशोधनात्पक्षशेषौ

य २ या ७

काव १ रू ३̇

अत्र पक्षावष्टभिः संगुण्यैकोनपञ्चाशद्रूपाणि प्रक्षिप्याद्यपक्षमूलम् या ४ रू ७ परपक्षस्या-स्य 'काव ८ रू २५' वर्गप्रकृत्या मूले ।

क ५ । ज्ये १५

वा, क १७५ । ज्ये ४९५

ज्येष्ठं प्रथमपक्षपदेन समं विधाय लब्धं

यावत्तावन्मानम् २ । वा १२२ । अत्र वर्गेणाव्यक्तवर्गराशिं केवलेनाव्यक्तमुत्थाप्य जातौ राशी ७ । ६ । वा । १५१२७ । २४६ तद्यथा या २ अस्य वर्गः ४ अनेन या १ गुणितः ४ केवलेन २ या २ गुणितः ४ उभयोर्व्यक्तत्वाद्योगः ८ ऋणगे रूपे १ वियोजिते जात एकः ७ तथा या २ केवलेन या २ गुणितः ४ रूप २ युतो जातः परः ६ । एवं द्वितीयः या १२२ वर्गः १४८८४ अनेन याव १ गुणितः १४८८४ केवलेन या १२२ या २ गुणितः २४४ उभयोर्व्यक्तयोर्योगादृणं रूपं विशोध्य जात एकः १५१२७ । तथा या २ केवलेन १२२ गुणितो व्यक्तरूप २ युतोऽपरः २४६ । एवं बहुधा ।

अथास्य सूत्रस्य व्याप्तिं प्रदर्शयितुमुदाहरणं शार्दूलविक्रीडितेनाह—राश्योरिति । हे कोमलामलमते, कोमला सुकुमारा अमला अज्ञानरूपेण मलेन रहिता मतिर्यस्येति तत्संबोधनम् । षट् सप्त, कर्मणी । हित्वा अत्रायमभिप्रायः—कयो राश्योर्योगवियोगौ त्रिसहितौ वर्गौ भवेतामित्यादिपरामर्शे षट्सप्तकयोः शीघ्रमुपस्थितिर्भवति यदृच्छया चानयोः सर्वेऽप्यालापा घटन्त इत्यनभिज्ञोऽपि प्रश्नस्यास्योत्तरं वदेदिति तन्निरासार्थमुदितं 'षट्सप्त हित्वा' इति । तौ राशी वद, ययो राश्योः त्रिभिः सहितौ योगवियोगौ वर्गौ कृती भवेताम् । ययोश्चतुर्भिरूनितं वर्गैक्यं वर्गो भवेत् । ययोरेव वर्गान्तरं रवियुतं

वर्गः स्यात् । ययोर्घातस्य वधस्य दलमर्धं सात्यमल्पेन लघुराशिना समेतं घनः स्यात् तेषां पदानां द्वियुक्ता युतिः कृतिः स्यात् ॥

उदाहरण—

वे दो न्यूनाधिक कौन राशि हैं, जिन के योग तथा अन्तर में २ जोड़ देने से मूल आता ह, और वर्गों के योग में ४ घटा देने से मूल आता है, और वर्गों के अन्तर में १२ जोड़ देने से मूल आता है, और उन के घात के आधे में, लघु राशि जोड़ देने से घनमूल आता है, इस भाँति पाँचों मूलों के योग में २ जोड़ देने से भी, वह (योग) वर्ग होता है।

पहले रूपोन अव्यक्त को वियोगमूल मान कर, राशियों का साधन करते हैं—वियोगमूल या १ रू १ं है, यहाँ योगान्तरक्षेप ३ का वर्गान्तरक्षेप १२ में भाग देने से ४ लब्धि आई। इसके मूल २ को वियोगमूल में जोड़ देने से, या १ रू १ यह योगमूल हुआ। इन दोनों के वर्ग हुए—

वियोगमूलवर्ग=याव १ या २ं रू १

योगमूलवर्ग=याव १ या २ रू १

इन में सक्षेप ३ योगान्तरक्षेप घटा देने से, वियोग और योग हुआ—

वियोग=याव १ या २ं रू २ं

योग=याव १ या २ रू २ं

इन पर से 'योगोऽन्तरेणोनयुतोऽर्धितः—' इस सूत्र के अनुसार राशि याव १ रू २ं। या २ इन का योग याव १ या २ रू २ं हुआ इसमें ३ जोड़ने से याव १ या २ रू १ इस का मूल या १ रू १ है। राशियों के वर्ग यावव १ याव ४ं रू ४। याव ४ इनके योग यावव १ रू ४ में ४ घटा देन से, शेष यावव १ रहा। इस का मूल याव १ है। और राशियों का वर्गान्तर यावव १ याव ८ं रू ४ इसमें १२ जोड़ देन से, यावव १ याव ८ं रू १६ हुआ, इसका मूल याव १ रू ४ं है। राशियों याव १ रू २ं। या २ के घात याघ २ या ४ं के आधे याघ १ या २ं में लघु राशि या २ जोड़ दन से याघ १ हुआ, इस का घनमूल या १ है। इस भाँति पाँचों मूलों का क्रम से न्यास—

या १ रू १

या १ रू १̇

याव१ रू ०

याव१ रू ४̇

या १ रू ०

इन का यथास्थान, योग याव २ या ३ रू ४̇ हुआ। इस में २ जोड़ देने से याव २ या ३ रू २̇ हुआ, यह वर्ग है। इसलिये कालक-वर्ग के साथ समीकरण के लिए न्यास—

याव २ या ३ काव ० रू २̇

याव ० या ० काव १ रू ०

समशोधन करने से

याव २ या ३ काव ० रू ०

याव ० या ० काव १ रू २

आठ से गुण कर, रूप ९ जोड़ने से—

याव १६ या २४ रू ९

काव ८ रू २५

पहले पक्ष का मूल या ४ रू ३ आया। दूसरे पक्ष में काव ८ को प्रकृति और रू २५ को क्षेप कल्पना किया। फिर इष्ट ५ को कनिष्ठ मान कर, उस का वर्ग २५ प्रकृति ८ से गुणित २०० हुआ, इस में क्षेप २५ जोड़ने से २२५ इसका मूल १५ ज्येष्ठ है। इस के साथ पहले पक्ष के मूल का समीकरण के लिये न्यास—

या ४ रू ३

या ० रू १५

समशोधन से यावत्तावत् की उन्मिति ३ आई। अथवा, कनिष्ठ १७५ है, इस से ज्येष्ठ मूल ४९५ हुआ। इस के साथ पूर्वमूल या ४ रू ३ का समीकरण करने से यावत्तावत् की उन्मिति १२३ आई। पूर्व उन्मिति ३ से, याव १ रू २̇। या २ इन में उत्थापन देने से ७।६ राशि हुई और दूसरी उन्मिति १२३ से इन्हीं राशियों में उत्थापन देने से १५१२७। २४६ राशि हुई।

अथवा, पहली राशि याव १ या २ रू १̇ और दूसरी या २ रू २ है। इन का योग याव १ या ४ रू १ तीन जोड़ देने से याव १ या ४ रू ४ हुआ, इस का मूल या १ रू २ है। राशियों का अन्तर याव १ रू ३̇ तीन जोड़ देने से याव १ हुआ, इस का मूल या १ है। और राशियों के वर्ग यावव १ याघ ४ याव २ या ४̇ रू १। याव ४ या ८ रू ४ के योग 'यावव १ याघ ४ याव ६ या ४ रू ५' में ४ घटा देने से शेष 'यावव १ याघ ४ याव ६ या ४ रू १' रहा, इस का मूल याव १ या २ रू १ आया। और इन के वर्गों यावव १ याघ ४ याव २ या ४̇ रू १। याव ४ या ८ रू ४ का अन्तर, यावव १ याघ ४ याव २̇ या १२ रू ३̇ हुआ। इस में १२ जोड़ देने से यावव १ याघ ४ याव २̇ या १२̇ रू ९, इस का मूल याव १ या २ रू ३̇ आया। राशियों का घात याघ २ याव ६ या २ रू २̇ हुआ। इस का आधा याघ १ याव ३ । या १ रू १̇ इस में लघुराशि या २̇ रू २ जोड़ देने से याघ १ याव । ३ या ३ रू १ हुआ इस का घनमूल या १ रू १ आया, इन पदों का क्रम से न्यास—

या १ रू २
या १ रू ०
याव १ या २ रू १
याव १ या २ रू ३̇
या १ रू १

इन के योग याव २ या ७ रू १ में २ जोड़ देने से याव २ या ७ रू ३ यह कालक वर्ग के समान हुआ। इसलिये समीकरण के अर्थ न्यास—

याव २ या ७ काव ० रू ३
याव ० या ० काव १ रू ०

समशोधन करने से हुए—

याव २ या ७ काव ० रू ०
याव ० या ० काव १ रू ३̇

आठ से गुणा कर, रूप ४९ जोड़ देने से हुए—

याव १६ या ५६ रू ४९
काव ८ रू २५

पहले पक्ष का मूल या ४ रू ७ आया। दूसरे पक्ष में काव ८ की प्रकृति, रू २५ को क्षेप कल्पना किया। बाद इष्ट ५ कनिष्ठ मानने से उक्त रीति के अनुसार, ज्येष्ठमूल १५ आया। अथवा कनिष्ठ १७५ है इस से ज्येष्ठमूल ४९५ आया। अब इन दोनों ज्येष्ठमूलों का प्रथम पक्षीय मूल या ४ रू ७ के साथ समीकरण करने से, यावत्तावत् का मान २। वा, १२२ आया। इन से पूर्व-राशि में उत्थापन देना चाहिये। पहला मान २ है, इसका वर्ग ४ हुआ, इस में द्विगुण यावत्तावन्मान ४ जोड़ देने से ८ हुआ, इसमें रूप १ घटा देने से, पहली राशि ७ हुई। और यावत्तावन्मान २ दूना करने से ४ हुआ, इस में रूप २ जोड़ देने से दूसरी राशि ६ हुई। इसी भाँति, दूसरे यावत्तावन्मान १२२ का वर्ग १४८८४ हुआ, इस में द्विगुण यावत्तावन्मान २ × १२२ = २४४ जोड़ देने से १५१२८ हुआ, इस में १ कम कर देने से, पहली राशि १५१२७ हुई और इसी भाँति दूने यावत्तावन्मान २४४ में २ जोड़ देने से, दूसरी राशि २४६ हुई॥

अथान्योदाहरणम्-

राश्योर्ययोः कृतियुति-
वियुती चैकेन संयुते वर्गौ।
रहितौ वा तौ राशी
गणयित्वा कथय यदि वेत्सि॥

अत्र कल्पितौ राशिवर्गौ याव ४। याव ५ रू १ अनयोर्योगवियोगौ रूपयुतौ मूलदौ भवतः कथितप्रथमवर्गस्य मूलमेको राशिः

या २ द्वितीयस्यास्य याव ५ रू १ वर्गप्रकृत्या मूले

क १ । ज्ये २

वा, क १७ । ज्ये ३८

अनयोर्ज्येष्ठपदं द्वितीयराशिः ह्रस्वं यावत्तावन्मानेनोत्थाप्याद्यराशिः एवं जातौ राशी २ । २ । वा ३४ । ३८ । अथ द्वितीयोदाहरणे तथैव कल्पितः प्रथमराशिः या २ द्वितीयस्यास्य याव ५ रू १ वर्गप्रकृत्या मूले

क ४ । ज्ये ९

वा, क ७२ । ज्ये १६१

कनिष्ठेन प्रथम उत्थापितो ज्येष्ठं द्वितीय इति जातौ राशी ८ । ९ वा । १४४ । १६१ ।

अत्राल्पराशिवर्गेण यो राशिरूनितो युतश्च मूलदः स्यात्स तावद् व्यक्त एव द्वितीयो ज्ञेयः। तस्यानयनेऽप्युपायस्तद्यथा—

कल्पितराशिवर्गः ४ अनेन द्वितीयराशिरूनितो युतश्च मूलदः स्यादित्ययं द्विगुणः ८ वर्गान्तरमिदं कयोरपि च योगान्तरघात-

समम् अतोऽन्तरमिष्टं २ कल्पितं 'वर्गान्तरं राशिवियोगभक्तं—' इति जाते वर्गान्तरयोग-मूले १ । ३ । आद्यस्य वर्गे १ कल्पितराशि-वर्गं४ प्रक्षिप्य द्वितीयस्य वर्गा ९ द्वा विशोध्य जातो द्वितीयः ५ । अत्र चाल्पराशिवर्गस्तथा कल्प्यते यथा द्वितीयराशिरभिन्नः स्यात्तथा-न्यः कल्पितः ३६ द्विगुणः ७२ इदं वर्गान्तरं राश्यन्तरषट्के कल्पिते जातौ ३ । ९ अन्य-वर्गात् ८१ कल्पितं ३६ विशोध्य जातो द्वितीयः४५ चतुष्केण वा ८५ द्विकेन वा ३२५ ।

अथान्यथा कल्पने युक्तिः—

राश्योर्घातेन द्विगुणेन वर्गयोगो युतोनि-तोऽवश्यं मूलदः स्यात् । राशिवधो द्विगुणो यथा वर्गः स्यात्तथैको वर्गोऽन्यो वर्गार्धमिति कल्प्यौ, यतो वर्गयोर्वधो वर्गो भवतीति । तथा कल्पितौ एकोवर्गः १ अन्यो वर्गार्धम् २ अन-योर्घातो २ द्विगुणः ४ अयं प्रथमः अयमल्प-राशिवर्गः, तयारेव वर्गयोगः ५ अयं द्वितीयो राशिः । अथवैको वर्गः ९ अन्यो वर्गार्धम् २ अनयोर्घातो १८ द्विगुणः३६ अयमल्पराशि-

वर्गः, अथ तयोरेव वर्गयोगः ८५ अयं द्वितीयो राशिः, एतौ व्यक्तौ यावत्तावद्वर्गगुणितौ कल्पितौ, प्रथमोदाहरणे द्वितीयो राशी रूपेणोनो द्वितीयोदाहरणे रूपयुतः कार्यः, एवं कृत्वा तथा तौ राशिवर्गौ कल्प्यौ यथालापद्वयमपि घटते किंतु प्रथमस्य मूलं गृहीत्वा द्वितीयस्य वर्गप्रकृत्या मूलमित्यादि पूर्वोक्तमेव । एवमनेकधा ॥

अथार्यया निबद्धमाद्योदाहरणं शिष्यबुद्धिप्रसारार्थं प्रदर्शयति–राश्योरिति । हे गणक, तौ राशी यदि वेत्सि तदा गणयित्वा कथय । ययोः कृत्योर्युतिवियुती वर्गयोर्योगान्तरे एकेन संयुते अथवा रहिते वर्गौ भवेताम् ॥

उदाहरण—

वे दो कौन राशि हैं, जिन का वर्गयोग और वर्गान्तर, एक से युक्त अथवा ऊन, वर्ग होते हैं ।

यहां पर याव ४ । याव ५ रू १ राशि कल्पना किये हैं । इन का रूप से जुड़ा हुआ योग याव ९ और अन्तर याव १ मूलप्रद होता है । और कल्पित पहली राशि याव ४ का मूल या २ है, दूसरी राशि याव ५ रू १ का मूल वर्गप्रकृति से, वहां इष्ट १ कनिष्ठ है, उसका वर्ग १ प्रकृति ५ गुणित ५ क्षेप १ से ऊन ४ का मूल २ ज्येष्ठ हुआ । वा, कनिष्ठ १७ है, उस से ज्येष्ठ ३८ हुआ, कनिष्ठ १ । १७ यावत्तावन्मान हैं, दूना करने से पहली राशि २ । ३४ और ज्येष्ठ २ । ३८ दूसरी राशि हैं, इन का क्रम से न्यास । २ । २ । वा, ३४ । ३८ ।

दूसरे उदाहरण में भी पहले की राशि हैं। उन में से पहली का मूल या २ हुआ, दूसरी का वर्गप्रकृति से, वहां इष्ट ४ कनिष्ठ है, इस के वर्ग १६ प्रकृति ५ गुणित ८० क्षेप १ युत ८१ का मूल ९ ज्येष्ठ हुआ, वा कनिष्ठ ७२ है, इससे ज्येष्ठ १६१ आया। कनिष्ठ ४ यावत्तावन्मान है उसको दूना करने से पहली राशि ८ हुई, ज्येष्ठ दूसरी राशि है ९। वा १४४। १६१।

यहां जो राशि लघुराशि के वर्ग से, ऊन-युक्त मूलद हो, उसको व्यक्तात्मक दूसरी जानना, उस के जानने के लिए यह विधि है—

यहां लघुराशि वर्ग ४ है, इस से ऊन-युत दूसरी राशि मूलद है।

लराव १ द्विरा १। लराव २

इसलिये लघुराशि का वर्ग ४ दूना ८ किसी दो राशि का वर्गान्तर है, और वह योगान्तरघात के तुल्य होता है। इसलिये 'वर्गान्तरं राशि-वियोगभक्तं—' के अनुसार, वर्गान्तर ८ में कल्पित वियोग २ का भाग देने से योग ४ आया। इन से संक्रमणसूत्र से राशि १। ३ आई। ये वर्गान्तर और वर्गयोग के मूल हैं। इन में पहली राशि १ का वर्ग १ है, इस में कल्पित लघुराशि २ का वर्ग ४ जोड़ देने से दूसरी राशि ५ है। अथवा, दूसरी राशि ३ के वर्ग ९ में, लघु-राशि वर्ग ४ घटा देने से वही राशि ५ आई। और ४ का मूल २ यह पहली राशि हुई। आलाप—बृहद्राशि ५ में लघुराशि वर्ग ४ जोड़ देने से वर्ग ९ हुआ। इसी भाँति घटा देने से वर्ग १ हुआ, और १।९ इन का अन्तर ८ दूने लघुराशि वर्ग २×४=८ के तुल्य है, इसलिये लघुराशि वर्ग दूना, वर्गान्तर के समान है। यहां पर लघुराशि वर्ग ऐसा मानना चाहिये, जिस में दूसरी राशि अभिन्न आवे, जैसा, दूसरी राशि ३६ कल्पित है, वह दूनी करने से ७२ हुई यह वर्गान्तर है, इस में कल्पित राश्यन्तर ६ का भाग देने से योग १२ आया। अब १२।६ इन योग-वियोग से संक्रमण द्वारा राशि आई ३। ९ ये वर्गान्तर और वर्गयोग के मूल हैं। इन में पहली राशि ३ के वर्ग ९ में कल्पित राशि ६ वर्ग ३६ जोड़ देने से दूसरी राशि ४५ हुई। और दूसरे मूल ९ वर्ग ८१ में, कल्पित राशी वर्ग ३६ घटा देने से भी वही

राशि ४५ मिली। इस भाँति पहली राशि ६ और दूसरी ४५ आई। वा, राशि वर्ग ३६ दूना करने से ७२ हुआ, यह वर्गान्तर है। इस में कल्पित राश्यन्तर ४ का भाग देने से योग १८ आया। इन से संक्रमण के द्वारा राशि ७। ११ आई। इन में पहली राशि ७ के वर्ग ४९ में कल्पित राशि ६ वर्ग ३६ जोड़ देने से दूसरी राशि ८५ हुई। वा २ अन्तर मानने से, दूसरी राशि ३२५ हुई। अथवा, राशि कल्पन में दूसरी युक्ति—

वर्गयोग दूने राशि घात से युत वा ऊन अवश्य मूलप्रद होता है। राशियों का घात दूना वर्ग हो ऐसा एक वर्ग कल्पना किया और दूसरा वर्गार्ध क्योंकि वर्गों का घात वर्ग होता है, तो १। २ राशि हैं इन का घात २ दूना हुआ ४ यह लघुराशि वर्ग ४ है। और १। २ इन का वर्ग १। ४ योग ५ दूसरी राशि हुई।

अथवा, एक वर्ग ९ और दूसरा वर्गार्ध २ है। इन का दूना घात ३६ यह लघु राशि वर्ग है, इस का मूल ६ पहली राशि है। और ९। २ इनका वर्ग ८१। ४ योग ८५ दूसरी राशि हुई। दोनों व्यक्तराशि यावत्तावद्वर्ग गुणित कल्पित की गई हैं। पहले उदाहरण में दूसरी राशि रूपोन और दूसरे उदाहरण में दूसरी राशि रूपयुत मानी गई है। जैसा-याव ४। याव ५ रू १। याव ४। याव ५ रू १ इसी प्रकार ऐसे राशिवर्ग कल्पना करने चाहिये, जिस में दो आलाप स्वतः घटित हों। उन में से पहली राशि का मूल स्वतः मिलेगा। दूसरे का वर्गप्रकृति से आवेगा।

सूत्रम्—

यत्राऽव्यक्तं सरूपं हि तत्र तन्मानमानयेत्।
सरूपस्यान्यवर्णस्य कृत्वा कृत्यादिना समम्॥
राशिं तेन समुत्थाप्य कुर्याद् भूयोऽपरां क्रियाम्
सरूपेणान्यवर्णेन कृत्वा पूर्वपदं समम्॥८३॥

यत्राद्यपक्षमूले गृहीते परपक्षेऽव्यक्तं सरू-

पमरूपं वा स्यात् तत्रान्यवर्णस्य सरूपस्य वर्गेण साम्यं कृत्वा तस्याव्यक्तस्य मानमानीय तेन राशिमुत्थाप्य पुनरन्यां क्रियां कुर्यात् तथा तेनान्यवर्णेन सरूपेणाद्यपक्षपदसाम्यं च, यदि पुनः क्रिया न भवेत्तदा तु व्यक्तेनैव वर्गादिना समक्रिया ॥

अथैकस्य पक्षस्य पदे गृहीते सति द्वितीयपक्षे यदि सरूपमरूपं वाव्यक्तं भवति तत्रोपायमनुष्टुब्द्वयेनाह—यत्रेति। यत्राद्यपक्षस्य मूले गृहीतेऽन्यपक्षेऽव्यक्तं सरूपमरूपं वा स्यात्तत्रान्यवर्णस्य सरूपस्य वर्गेण साम्यं कृत्वा तस्याव्यक्तस्य मानमानयेत् । यत्र तु प्रथमपक्षस्य घनपदे गृहीतेऽन्यपक्षेऽव्यक्तं सरूपमरूपं वाव्यक्तं स्यात्तत्रान्यवर्णस्य सरूपस्य घनेन साम्यं कृत्वा अव्यक्तमानमानयेत्, 'कृत्यादिना' इत्यादिपदोपादानात् । अथागतेन वर्णात्मकेनाव्यक्तमानेन राशिमुत्थाप्य सरूपेण कल्पितेनान्यवर्णेन आद्यपक्षपदसाम्यं च कृत्वा पुनरन्यां क्रियां कुर्यात् । यदि पुनः क्रिया नास्ति तदा सरूपस्यान्यवर्णस्य वर्गादिना समीकरणं न कार्यम्, यतस्तथा कृते राशिमानमव्यक्तमेव स्यात्। किंतु व्यक्तेनैव वर्गादिना समीकरणं कार्यं यत् एवं कृते राशिमानं व्यक्तमेव स्यात् । अव्यक्तवर्गोऽव्यक्तघनो वा तथा कल्प्यो यथा मानमभिन्नं स्यात् ॥

अब एक पक्ष का मूल लेने पर यदि दूसरे पक्ष में सरूप वा अरूप अव्यक्त हो तो वहाँ की क्रिया कहते हैं—

जहाँ पहले पक्ष के मूल लेने के अनन्तर दूसरे पक्ष में सरूप अथवा अरूप अव्यक्त हो, वहाँ पर सरूप अन्यवर्ण के वर्ग के साथ समीकरण कर के उस अव्यक्त का मान लाना । जहाँ पर आद्यपक्ष

के घनमूल लेने के बाद दूसरे पक्ष में रूप से युक्त वा, हीन अव्यक्त हो, वहाँ सरूप अन्यवर्ण के घन के साथ समीकरण कर के अव्यक्त-मान सिद्ध करना, और उस वर्णात्मक अव्यक्तमान से राशि में उत्थापन देना और आद्यपक्ष के मूल का कल्पित सरूप अन्यवर्ण के साथ समीकरण कर के फिर अन्य क्रिया करना यदि अन्य क्रिया न हो तो, सरूप अन्यवर्ण के वर्गादिक के साथ समीकरण न करना। क्योंकि वैसा करने से राशि का मान अव्यक्त आवेगा । किंतु व्यक्त राशि के वर्गादि के साथ समीकरण करना इस भाँति राशि का मान व्यक्त होगा । यहां अव्यक्त के वर्ग, घन आदि ऐसे कल्पना करना कि जिस में राशि का मान अभिन्न मिले ।

उपपत्ति—

एक पक्ष के मूल लेकर फिर यदि दूसरे पक्ष में सरूप अथवा अरूप अव्यक्त हो तो, वह भी वर्गात्मक है। क्योंकि पक्षों की समता ठहराई है । अब वहाँ पर, यदि केवल अव्यक्त हो तो अन्यवर्ण के वर्ग के साथ सम क्रिया करनी चाहिये और जो रूप के साथ अव्यक्त हो तो सरूप अन्य वर्ण के वर्ग के साथ समीकरण करना उचित है। क्योंकि वैसा करने से दूसरे पक्ष में सरूप वर्णवर्ग होगा, तब वर्गप्रकृति का विषय होगा ।

उदाहरणम्—

यस्त्रिपञ्चगुणो राशिः पृथक् सैकः कृतिर्भवेत् ।
वद तं बीजमध्येऽसि मध्यमाहरणे पटुः ॥९६॥

अत्र राशिः या १ एष त्रिगुणः सैकः या ३ रू १ अयं वर्ग इति कालकवर्गसमं कृत्वा पक्षयो रूपं प्रक्षिप्य लब्धं कालकपक्षस्य मूलम् का १ अन्यपक्षस्यास्य या ३ रू १ सरू-

पनीलकत्रयस्य वर्गेण नीव ९ नी ६ रू १ साम्यं कृत्वा लब्धयावत्तावन्मानेनोत्थापितो जातो राशिः नीव ३ नी २ पुनरयं पञ्चगुणः सैको वर्ग इति नीव १५ नी १० रू १ पीतकवर्गसमं कृत्वा समशोधने कृते पक्षौ नीव १५ नी १०

पीव १ रू $\dot{1}$

इमौ पञ्चदशभिः संगुण्य पञ्चविंशतिरूपाणि प्रक्षिप्याद्यस्य पक्षस्य मूलम् नी १५ रू ५ परपक्षस्यास्य पीव १५ रू १० वर्गप्रकृत्या मूले

क ९ । ज्ये ३५

वा, क ७१ । ज्ये २७५

कनिष्ठं पीतकमानं ज्येष्ठमाद्यपक्षस्य मूलेनानेन 'नी १५ रू ५' समं कृत्वाप्तं नीलकमानम् २। वा १८। स्वस्वमानेनोत्थाप्य जातो राशिः १६। वा १००८। अथ वैकालापः स्वत एव संभवति तदा कल्पितो राशिः 'याव $\frac{1}{3}$ रू $\frac{\dot{2}}{3}$' एष पञ्चगुणो रूपयुतो याव $\frac{5}{3}$ रू $\frac{\dot{1}}{3}$' मूलद इति कालकवर्गसमं कृत्वा पक्षयोः ऋणत्र्यंशद्वयं प्रक्षिप्योक्तवद्गृहीतं कालकपक्षस्य मूलम्

का१ द्वितीयपक्षस्यास्य $\frac{\text{याव ५ रू २̇}}{\text{३ ३}}$ वर्गप्रकृत्या मूले क ७। ज्ये ९ वा, क ५५। ज्ये ७१ अत्र कनिष्ठं प्रकृतिवर्णमानं तेन कल्पितराशिमुत्थाप्य जातो राशिः स एव १६। वा १००८

अत्रोदाहरणमनुष्टुभाह—य इति । हे गणक, यदि त्वं बीजमध्ये मध्यमाहरणे पटुरसि तदा तं राशिं वद । यो राशिः पृथक् त्रिपञ्चगुणः सैकः कृतिर्भवेत् । अयमभिप्रायः—राशिस्त्रिगुणः सैकस्तथा पञ्चगुणः सैकश्च वर्गः स्यात् ॥

उदाहरण—

वह कौन राशि है, जो अलग अलग पांच और तीन से गुणा तथा दोनों स्थानों में १ से युत मूलप्रद होता है ।

राशि या १ है, इसे ३ गुणा कर १ जोड़ने से, या ३ रू १ हुआ वह वर्ग है, इसलिये कालक वर्ग के साथ साम्य हुआ—

या ३ काव ० रू १

या ० काव १ रू ०

समशोधन करने से हुए—

या ३

काव १ रू १̇

इनमें १ जोड़ देने से कालक पक्ष का मूल का १ आया और दूसरे पक्ष 'या ३ रू १' का, नी ३ रू १ इसके वर्ग के साथ साम्य के लिए न्यास—

या ३ नीव ० नी ० रू १

या ० नीव ९ नी ६ रू १

समशोधन से हुए—

या ३

नीव ९ नी ६

हर ३ का भाग देने से यावत्तावन्मान नीव ३ नी २ आया इससे

या १ राशि में उत्थापन देने से, नीव ३ नी २ राशि हुई। फिर यह ५ से गुणित और सैक वर्ग है, इसलिये पीतकवर्ग के साथ साम्य—

नीव १५ नी १० पीव ० रू १
नीव ० नी ० पीव १ रू ०

समशोधन से हुए—

नीव १५ नी १० पीव ० रू ०
नीव ० नी ० पीव १ रू १̇

१५ से गुण कर २५ जोड़ देने से हुए—

नीव २२५ नी १५० पीव ० रू २५
नीव ० नी ० पीव १५ रू १०

आद्य पक्ष का मूल नी १५ रू ५ हुआ। अन्य पक्ष का वर्ग प्रकृति से, वहां कनिष्ठ ६ कल्पना किया। उस से ज्येष्ठ ३५ आया। वा कनिष्ठ ७१, ज्येष्ठ २७५ कनिष्ठ पीतक का मान है और ज्येष्ठ आद्य पक्ष के मूल के तुल्य है। इसलिये साम्य के लिये न्यास—

नी १५ रू ५
नी ० रू ३५

नी १५ रू ५
नी ० रू २७५

समक्रिया से नीलक का मान २। वा १८ मिला। इस से राशि 'नीव ३ नी २' में उत्थापन देते हैं—मान २ का वर्ग ४ त्रिगुण १२ हुआ इसमें दूना मान ४ जोड़ने से राशि १६ हुई। अथवा, मान १८ का वर्ग ३२४ त्रिगुण ९७२ हुआ, इस में दूना मान २×१८= ३६ जोड़ने से राशि १००८ हुई। अथवा, राशि या १ त्रिगुण या ३ सैक या ३ रू १ वर्ग है, इसलिये काव १ के साथ साम्य—

या ३ काव ० रू १
या ० काव १ रू ०

समशोधन से यावत्तावत् का मान $\frac{\text{काव १ रू १̇}}{\text{या ३}}$ आया। इस से राशि

या १ में उत्थापन देने से राशि $\frac{\text{काव १ रू १̇}}{\text{या ३}}$ हुई। वा, जिस में एक आलाप स्वतः घटित हो ऐसी राशि $\frac{\text{याव १ रू १̇}}{\text{३}}$ कल्पित है। यह ५ से गुण कर रूप १ जोड़ देने से $\frac{\text{याव ५ रू २̇}}{\text{३}}$ मूलद है, इसलिये कालकवर्ग के साथ साम्य के लिए न्यास—

$\frac{\text{याव ५ रू २̇}}{\text{३}}$

काव १

समच्छेद और छेदगम से हुए—

याव ५ रू २̇

काव ३

समशोधन से हुए—

याव ५ रू ०

काव ३ रू २

५ से गुणने से हुए—

याव २५ रू ०

काव १५ रू १०

आद्यपक्ष का मूल या ५ आया और दूसरे का वर्ग प्रकृति से, इष्ट ९ कनिष्ठ है, उसका वर्ग ८१ प्रकृति १५ गुणित १२१५ क्षेप १० युत १२२५ का मूल ३५ ज्येष्ठ हुआ। इस का आद्यपक्षीय मूल के साथ साम्य के लिये न्यास—

या ५ रू ०

या ० रू ३५

समशोधन से यावत्तावत् का मान ७ आया इस से राशि $\frac{\text{याव १ रू १̇}}{\text{३}}$ में उत्थापन देते हैं—मान ७ वर्ग ४९ रूप १̇ से हीन ४८ हुआ, इस में हर ३ का भाग देने से वही राशि १६ आई। वा, कनिष्ठ ७१ ज्येष्ठ

२७५ है। समीकरण से यावत्तावत् का मान ५५ आया, मान ५५ वर्ग ३०२५ रूपोन ३०२४ हुआ, इस में हर ३ का भाग देने से १००८ राशि आई॥

अथान्योदाहरणम्--

'को राशिस्त्रिभिरभ्यस्तः सरूपो जायते घनः।
घनमूलं कृतीभूतं त्र्यभ्यस्तं कृतिरेकयुक्॥'

अत्र राशिः या १ अयं त्र्यभ्यस्तो रूपयुतः या ३ रू १ एष घन इति कालकघनसमं कृत्वा प्राग्वज्जातो राशिः काघ $\frac{1}{3}$ रू $\frac{1}{3}$ अस्य त्रिगुणस्य सरूपस्य घनमूलं वर्गितं त्रिहतं रूपयुतं काव ३ रू १ एतत्कृतिरिति नीलकवर्गसमं कृत्वा पक्षयो रूपं प्रक्षिप्य प्रथमपक्षमूलम् नी १ द्वितीयपक्षस्यास्य काव ३ रू १ वर्गप्रकृत्या मूले

क १। ज्ये २

वा, क ४। ज्ये ७

वा, क १५। ज्ये २६

कनिष्ठं कालकमानम् ४ अस्य घने ६४ नोत्थापितो जातो राशिः २१। वा $\frac{3374}{3}$

अथ पूर्वपक्षस्य घनमूले गृहीते सत्यन्यवर्णस्य घनेन समीकरणं

कार्यमित्युक्तं तत्रोदाहरणमाचार्यैरनुष्टुभा निबद्धं दर्शयति—क इति । को राशिस्त्रिभिरभ्यस्तो गुणितः सरूपो घनो जायते । घनस्य मूलं कृतीभूतं वर्गीकृतं त्र्यभ्यस्तं त्रिगुणितमेकयुक् कृतिः ॥

उदाहरण—

वह कौन राशि है, जिस को तीन से गुणा कर, एक जोड़ देते हैं तो घन होता है और घनमूल के वर्ग को तीन से गुणा कर, एक जोड़ देते हैं, तो वर्ग होता है ।

राशि या १ त्रिगुण और एक से युत या ३ रू १ हुआ, यह घन है इसलिये काघ १ के साथ साम्य—

या ३ रू १
काघ १ रू ०

समशोधन से यावत्तावत् का मान (काघ १ रू १̇)/(या ३) हुआ । यह ३ से गुणने से (काघ ३ रू ३̇)/(या ३) = काघ १ रू १̇ हुआ । इसमें १ जोड़ने से, घनमूल का १ आया । इस का वर्ग त्रिगुण रूप युत वर्ग है, इसलिये नीव १ के साथ साम्य—

काव ३ रू १
नीव १ रू ०

समशोधने से हुए—

काव ३ रू ०
नीव १ रू १̇

१ जोड़ने से नीलक पक्ष का मूल नी १ आया और दूसरे पक्ष 'काव ३ रू १' का वर्ग प्रकृति से, वहां इष्ट ४ कनिष्ठ है, उसका वर्ग १६ प्रकृति गुणित ४८ क्षेप १ युत ४९ का मूल ७ ज्येष्ठ हुआ । कनिष्ठ कालक मान है । उस ४ के घन ६४ से राशि (काघ १ रू ३̇)/(३) में उत्थापन देकर उसमें १ घटा कर हर ३ का भाग देने से, राशि २१ आई । वा, कनिष्ठ १५ से ज्येष्ठ २६ हुआ

कनिष्ठ १५ कालक का मान है, इस के घन ३३७५ में १ घटा कर हर ३ का भाग देने से राशि $\frac{३३७४}{३}$।

उदाहरणम्—

वर्गान्तरं कयो राश्योः पृथग् द्वित्रिगुणं त्रियुक्।
वर्गौ स्यातां वद क्षिप्रं षट्कपञ्चकयोरिव ८७॥

अथ विशेषप्रदर्शनार्थमपरमुदाहरणमनुष्टुभाह—वर्गान्तरमिति। षट्कपञ्चकयोर्वर्गान्तरमुक्तविधमस्तीति सुप्रसिद्धं तावत्। परं त्वेतयोर्वर्गान्तरं यथोक्तविधमास्ति तथान्ययोः कयोरस्तीति प्रश्नाभिप्रायः॥

उदाहरण—

पांच और छ के समान, वे दो कौन राशि हैं, जिन के वर्गान्तर अलग अलग २ और ३ से गुणा कर ३ जोड़ देने से वर्ग होते हैं।

अथ राश्योरव्यक्तकल्पने क्रिया न निर्वहतीति वर्गान्तरमेवाव्यक्तं कल्प्यमिति प्रदर्शयन्ननुष्टुभाह—

यहां पर राशियों का अव्यक्तमान मानने से क्रिया नहीं चलती इसलिये वर्गान्तर ही को अव्यक्त कल्पना करना चाहिये, इत्यादि युक्ति दिखलाते हैं——

क्वचिदादेःक्वचिन्मध्यात्क्वचिदन्त्यात्क्रिया बुधैः
आरभ्यते यथा लघ्वी निर्वहेच्च यथा तथा ८४

क्वचिदादेः प्रश्नकर्त्रालापस्यादितः, क्वचिन्मध्यादालापमध्यात्, क्वचिदन्त्यात् विलोमकर्मद्वारेणेत्यर्थः, क्रिया प्रश्नोत्तरसाधिका युक्तिर्यथा लघ्वी यथा च निर्वहेत् तथा बुधैरारभ्यते। न खलु तादृशीं क्रियां समारभेत या महती प्रश्नोत्तरावष्टम्भिका च भवेत्॥

कहीं आलाप के प्रारम्भ से, कहीं उस के मध्य से, कहीं विलोम विधि के अनुसार अन्त ही से, इस भाँति क्रिया की जाती है। जिस में वह लघु हो और आगे की क्रिया चल सके।

अतोऽत्र वर्गान्तरं या १ एतद् द्विघ्नं त्रियुतं या २ रू ३ वर्ग इति कालकवर्गसमं कृत्वाप्त-यावत्तावन्मानेनोत्थापितो जातो राशिः काव $\frac{१}{२}$ रू $\frac{३}{२}$ पुनरिदं त्रिघ्नं त्रियुतं काव $\frac{३}{२}$ रू $\frac{३}{२}$ वर्ग इति नीलकवर्गसमं कृत्वा समशोधने कृते जातौ पक्षौ नीव २ रू ३

काव ३

एतौ त्रिभिः संगुण्य कालकपक्षमूलं का ३ कृत्वा परपक्षस्यास्य नीव ६ रू ९ वर्ग-प्रकृत्या मूले

क ६ । ज्ये १५

वा, क ६० । ज्ये १४७

ज्येष्ठं प्रथमपक्षपदेन का ३ समं कृत्वा लब्धं कालकमानम् ५ । वा ४९ प्राग्वदाप्तकालक-मानेनोत्थापितं जातं वर्गान्तरं राश्योः ११ । वा ११९९ इदमन्तरहृतं द्विधान्तरेणोनयुत-मर्धितं राशी भवत इति प्रागुक्तमतोऽन्तर-मिष्टं रूपं प्रकल्प्य जातौ राशी ६ । ५ । वा ६० । ५९९ । अथवान्तरमेकादश प्रकल्प्य जातौ राशी ६० । ४९ ।

उक्त शिक्षा के अनुसार, राशियों का वर्गान्तर या १ द्विगुण त्रियुत या २ रू ३ हुआ। इस का कालकवर्ग के साथ साम्य करने से, यावत्तावत् का मान (काव १ रू ३̇) / २ आया। यह भी राशि है, इस लिये ३ से गुण कर ३ जोड़ने से (काव ३ रू ३̇) / २ हुआ। यह वर्ग है, इस लिये नीलकवर्ग के साथ साम्य—

काव ३ रू ३̇
———
२

नीव १

समच्छेद और छेदगम से हुए—

काव ३ रू ३̇
नीव २ रू ०

समशोधन से हुए—

काव ३ रू ०
नीव २ रू ३

३ से गुणने से हुए—

काव ९ रू ०
नीव ६ रू ९

कालक पक्ष का मूल का ३ आया, दूसरे पक्ष नीव ६ रू ९ का मूल वर्ग प्रकृति से, वहां इष्ट ६ कनिष्ठ है, उसका वर्ग ३६ प्रकृति ६ गुणित २१६ क्षेप ९ युत २२५ का मूल ज्येष्ठ १५ हुआ। कनिष्ठ ६० है, उससे ज्येष्ठ १४७ हुआ। ज्येष्ठ का पूर्व मूल के साथ साम्य के लिये न्यास—

का ३ रू ०
का ० रू १५
———
का ३ रू ०
का ० रू १४७

समीकरण से कालक का मान ५। वा ४९, आया। इस से

पूर्व राशि $\frac{\text{काव १ रू ३}}{\text{या २}}$ में उत्थापन देते हैं। १ कालक का ५ मान है, तो कालक वर्ग का क्या ? यों वर्ग २५ हुआ, इस में रूप ३ घटा कर, हर २ का भाग देने से राशि ११ आई। इसी भाँति ४९ से उत्थापन देने से ११९९ राशि हुई।

यहां यावत्तावन्मान को वर्गान्तर मान कर, राशिज्ञान के लिये यह युक्ति दिखलाई है। जैसा—वर्गान्तर ११ है, इस में इष्ट राश्यन्तर १ का भाग देने से राशि योग ११ आया। इस से संक्रमण द्वारा राशि ५। ६ मिलीं। वा, वर्गान्तर ११९९ है, इस में इष्ट अन्तर ११ का भाग देने से, राशि योग १०९ आया, बाद संक्रमण से राशि ६०। ४९ मिलीं।

अथान्यत्करणसूत्रं सार्धवृत्तम्—

वर्गादेर्यो हरस्तेन गुणितं यदि जायते।
अव्यक्तं तत्र तन्मानमभिन्नं स्याद्यथा तथा ॥८५॥
कल्प्योऽन्यवर्णवर्गादिस्तुल्यः शेषं यथोक्तवत्

यत्र वर्गादौ कुट्टकादौ वा एकपक्षमूले गृहीतेऽन्यपक्षेऽव्यक्तवर्गादिकस्य यो हरस्तेन गुणितमव्यक्तं यदि स्यात्तदा तस्य मितिरभिन्ना यथा स्यात्तथान्यवर्णवर्गादिः सरूपो रूपोनो वा तुल्यः कल्प्यः शेषं पूर्वसूत्रवत् ॥

विशेष—

जिस स्थान में एक पक्ष के मूल लेने के बाद, दूसरे पक्ष में यदि अव्यक्त वर्गादि के हर से गुणा हुआ अव्यक्त हो तो, वहाँ पर सरूप वा, अरूप अन्य वर्णों के वर्ग आदि ऐसे कल्पना करना कि, जिस के साथ समीकरण करने से, उस अव्यक्त का मान अभिन्न आवे

उदाहरणम्—

को वर्गश्चतुरूनः सन् सप्तभक्तो विशुध्यति ।
त्रिंशदूनोऽथवा कः स्याद्यदि वेत्सि वद द्रुतम् ॥

अत्र राशिः या १ अस्य वर्गश्चतुरूनः सप्तभक्तो विशुध्यतीति लब्धिप्रमाणं कालकस्तद्गुणितहरेणास्य याव १ रू ४ साम्यं कृत्वा प्रथमपक्षमूलम् या १ परपक्षस्यास्य का ७ रू ४ मूलाभावात् 'वर्गादेर्यो हरस्तेन गुणितं यदिजायते' इत्यादिनाकरणेन नीलकसप्तकस्य रूपद्वयाधिकस्य वर्गेण तुल्यं कृत्वा लब्धं कालकमानमभिन्नं जातम् नीव७ नी४ यत्तु कल्पितं तस्य द्वितीयपक्षस्य मूलम् नी७ रू २ इदं प्राक्पक्षमूलस्यास्य या १ समं कृत्वाप्तं यावत्तावन्मानम् नी७ रू२ सक्षेपम् ९ अस्य वर्गो राशिः स्यात् ८१ ॥

उदाहरण—

वह कौन वर्ग है, जिस में चार वा, तीस घटा कर, सात का भाग देने से, निःशेष होता है ।

राशि याव १ में ४ घटा कर ७ का भाग देने से $\frac{\text{याव १ रू ४}}{७}$ हुआ । यह निःशेष होता है, इसलिये लब्धि का मान का १ कल्पना

किया । अब हर ७ और लब्धि का १ का घात, शेष ० युत भाज्य राशि के तुल्य हुआ—

याव १ का ० रू ४

याव ० का ७ रू ०

समशोधन से हुए—

याव १ का ०

का ७ रू ४

पहले पक्ष का मूल या १ आया और दूसरे पक्ष का ७ रू ४ का मूल वर्गप्रकृति से नहीं आता, इसलिये 'वर्गादेर्यो हरः' इस सूत्र के अनुसार रूप २ से सहित अन्यवर्ण नी ७ रू २ के वर्ग के साथ साम्य के लिये न्यास—

का ७ नीव ० नी ० रू ४

का ० नीव ४९ नी २८ रू ४

समशोधन से हुए—

का ७ नीव ० नी ० रू ०

का ० नीव ४९ नी २८ रू ०

और उक्तवत् कालक का मान अभिन्न नीव ७ रू ४ आया । कल्पित मूल नी ७ रू २ पूर्व मूल या १ के तुल्य है, इसलिये समीकरण से यावत्तावत् का मान नी ७ रू २ आया । नीलक का व्यक्त १ मान मानने से यावत्तावत् का मान व्यक्त ९ हुआ । इसका वर्ग ८१ राशि है ।

अथवान्यवर्णकल्पनायां मन्दावबोधार्थं पूर्वैरुपायः पठितः । सूत्रम्—

'हरभक्ता यस्य कृतिः
शुध्यति सोऽपि द्विरूपपदगुणितः ।
तेनाहतोऽन्यवर्णो
रूपपदेनान्वितः कल्प्यः ॥

न यदि पदं रूपाणां
क्षिपेद्धरं तेषु हारतष्टेषु ।
तावद्यावद्वर्गो
भवति न चेदेवमपि खिलं तर्हि ॥
हित्वा क्षिप्त्वा च पदं
यत्राद्यस्येह भवति तत्रापि ।
आलापित एव हरो
रूपाणि तु शोधनादिसिद्धानि ॥'

हर भक्तेति । यस्याङ्कस्य कृतिर्हरभक्ता सती शुध्यति निःशेषा भवति, अपि च सोऽप्यङ्को द्वाभ्यां रूपपदेन गुणितो हरभक्तःसन् शुध्यति तदा तेनाङ्केन हतोऽन्यवर्णस्तेन रूपेणान्वितः कल्प्यः । यदि तु रूपाणां पदं न तदा तेषु हरतष्टेषु रूपेषु तावद्धरं क्षिपेद् यावद्वर्गो भवेत् तन्मूलं रूपपदं भवेत् । एवमपि कृते चेद्वर्गः कदाचिन्न भवेत्तदा तदुदाहरणं खिलं स्यात् । यत्र तु आद्यपक्षस्य मूलं 'हित्वा क्षिप्त्वा–' इत्यादिना लभ्यते तदा हर आलापित एव ग्राह्यः । न तु गुणितो विभक्तो वा । रूपाणि तु समशोधने कृते शोध-

नादि सिद्धानि यानि तान्येव ग्राह्याणि । एवं घनेऽपि योज्यम् । तद्यथा——यस्याङ्कस्य घनो हरभक्तः शुध्यति तथा च सोऽप्यङ्कस्त्रिभी रूपाणां घनमलेन गुणितो हरभक्तः शुध्यति तदा तेनाङ्केन हतोऽन्यवर्णो रूपाणां घनमूलेन चान्वितः कल्प्यः । यदि रूपाणां घनमूलं न लभ्यते तदा तेषु रूपेषु हरतष्टेषु तावद्धरं क्षिपेद्यावद्घनो भवेत् तच्च घनमूलं रूपपदं स्यात् एवमपि कृते च घनः कदाचिन्न भवेत्तदुदाहरणं खिलं स्यादित्यग्रेऽपि योज्यमिति शेषः ॥

अथ द्वितीयोदाहरणे राशिः या १ अस्य यथोक्तं कृत्वाद्यपक्षस्य मूलम् या १ परपक्षस्यास्य का ७ रू ३० 'न यदि पदं रूपाणां——' इत्यादिकरणेन हारतष्टरूपेषु द्विगुणं हरं प्रक्षिप्य मूलम् ४ एतदधिकनीलकसप्तकवर्गसमीकरणादिना प्राग्वज्ज्ञातो राशिः नी ७ रू ४ । अथ यदि ऋणरूपैरन्वितं नीलकसप्तकं नी ७ रू ४̇ परिकल्प्यानीयते तदान्योऽपि राशिः ३ स्यात् ॥

'वर्गादेर्यो हर:-' इस सूत्र में जो अन्यवर्ण के वर्ग आदि की कल्पना कही है, उसके ज्ञान के लिये अब पूर्वाचार्योक्त उपाय दिखलाते हैं—जिस राशि का वर्ग हर के भाग देने से नि:शेष हो, उस राशि को दो और रूपमूल से गुण देना। फिर उस में हर का भाग देना, यदि नि:शेष हो तो, उस से अन्य वर्ण को गुण देना और उस में रूपमूल जोड़ देना, तब उसको परपक्ष के मूलस्थान में कल्पना करना। यदि रूपों का मूल न आता हो तो, हार से तष्टित किये हुए रूपों में, हर को तब तक जोड़ते जाना जब तक वह वर्ग न हो जावे। यों जो उस का मूल आवे, उसको रूपपद कल्पना करना। यदि ऐसा करने से भी रूपों का मूल न मिले, तो वह उदाहरण दुष्ट होगा। और जहाँ पर पक्षों को गुण कर, उन में रूप जोड़ कर आद्यपक्ष का मूल आता है, वहाँ हर आलापित अर्थात् पाठपठित लेना चाहिये। और रूपशोधनादि सिद्ध अर्थात् गुणन तथा योजन के अनन्तर रूप स्थान में जो रूप निष्पन्न हुये हैं, उन को ग्रहण करना चाहिये। इसी भाँति, घन में भी जानना चाहिये। जैसा, जिस राशि का घन हर के भाग देने से नि:शेष हो, उसको तीन और रूपों के घन मूल से गुण देना फिर उस में हर का भाग देना। यदि नि:शेष हो तो, उस से अन्य वर्ण को गुण देना और उस में रूपों के घनमूल को जोड़ देना। तब उस को परपक्ष के मूलस्थान में कल्पना करना चाहिए। यदि रूपों का घनमूल न आता हो तो, हार से तष्टित रूपों में, हर को तब तक जोड़ते जाना जब तक वह घन न हो जाय। यों जो उस का मूल आवे, उसको रूपपद कल्पना करना। यदि ऐसा करने से भी रूपों का घनमूल न मिले तो, वह उदाहरण दुष्ट होगा। इसी भाँति आगे भी जानना चाहिए।

यहाँ प्रकृत उदाहरण में, पहले पक्ष का मूल या १ आया है और दूसरे पक्ष का ७ रू ४ का मूल लाना है। हर ७ है, और रूप ७ के वर्ग ४९ में हर ७ का भाग देने से नि:शेषता होती है। ७ दूना करने से १४ हुआ, परपक्ष के रूप ४ के मूल २ से गुणने

से २८ हुआ। यह हर ७ के भाग देने से शुद्ध होता है, इसलिये उस ७ से अन्यवर्ण नी १ को गुण देने से नी ७ हुआ। इस में रूप ४ का मूल २ जोड़ देने से नी ७ रू २ हुआ। इसके वर्ग के साथ परपक्ष का ७ रू ४ का समीकरण के लिये न्यास—

का ७ नीव ० नी ० रू ४

का ० नीव ४९ नी २८ रू ४

उक्तवत् कालक मान अभिन्न नीव ७ नी ४ आया, और नी ७ रू २ यह दूसरे पक्ष का मूल है। अन्यथा इस का वर्ग दूसरे पक्ष के समान न होगा। इसलिये प्रथमपक्ष मूल या १ का, नी ७ रू २ इस द्वितीय पक्ष मूल के साथ समीकरण करने से, यावत्तावत् का मान नी ७ रू २ आया। यहाँ नीलक का व्यक्तमान १ कल्पना किया, वह ७ से गुणाने से ७ हुआ। इस में रूप २ जोड़ देने से यावत्तावत् का मान व्यक्त ९ हुआ। इसका वर्ग ८१ राशि है। और कालक का मान नीव ७ नी ४ है, मान १ के वर्ग १ को ७ से गुण देने से ७ हुआ, इस में चौगुना नीलक मान ४×१=४ जोड़ देने से कालक का मान व्यक्त ११ हुआ।

आलाप—राशि ८१ में ४ घटा कर ७७ उस में ७ का भाग देने से लब्धि ११ कालक मान ११ के तुल्य मिली।

उपपत्ति—

यहाँ वर्गकुट्टक में, 'कौन वर्ग उद्दिष्ट क्षेप से युत वा ऊन और हर से भाजित निःशेष होता है?' यह आलाप है। जिस भाँति उक्त रीति के अनुसार पहले पक्ष का मूल या १ ग्रहण किया है और दूसरे पक्ष का ७ रू ४ का मूल नहीं आता, इसलिये उस वर्गात्मक पक्ष का तीसरे कल्पित वर्गात्मक पक्ष के साथ समीकरण करना ठहराया है और समशोधन करने से अभिन्न मान लाये हैं, उस को सयुक्तिक दिखलाते हैं—यहाँ पर वर्गात्मक तीसरे पक्ष का मूल इष्टाङ्क से गुणित रूपयुत अन्यवर्ण को कल्पना किया, जैसा—नी ७ रू २। और दूसरे पक्ष का ७ रू ४ के रूप ४ के मूल २ के तुल्य तीसरे पक्ष के मूलरूप २ को कल्पना किया। क्योंकि उस २ का वर्ग ४ करने

से समीकरण के समय, उन तुल्य रूपों का नाश हो जायगा। इसलिये 'रूपपदेनान्वित: कल्प्य:' यह कहा है। और इष्टाङ्क से गुणित अन्त्य वर्ण नी ७ में इष्टाङ्क रूप गुणक ७ ऐसा कल्पना किया कि, जिस में वर्गात्मक तृतीयपक्ष नीव ४६ नी २८ रू ४ द्वितीयपक्ष का ७ रू ४ के साथ समीकरण करने से निःशेष होवे। जैसा—आद्यपक्ष शेष नीव ४६ नी २८ में, अव्यक्त शेष का ७ का भाग देने से निरग्र लब्धि नीव ७ नी ४ आती है। इस से अभिन्न मान होगा। यहाँ जिस अङ्क का वर्ग हर ७ का भाग देने से निःशेष होता है, वह इष्टाङ्क ७ कल्पना किया गया है। और दूसरे पक्ष का अव्यक्त शेष का ७ आलाप विधि से हर गुणित वर्ण के तुल्य होता है, इसलिये 'हरभक्ता यस्य कृति: शुध्यति–' यह कहा है। और कल्पित तीसरे पक्ष का मूल खण्डद्वयात्मक नी ७ रू २ है, उसके वर्ग करने में, तीन खण्ड होते हैं—नीव ४६ नी २८ रू ४ अर्थात् अन्त्य नी ७ का वर्ग नीव ४६ पहला खण्ड, नीलक ७ और रूप २ इन का दूना घात नी २८ दूसरा, और रूपवर्ग ४ तीसरा। यहाँ पहला खण्ड नीव ४६ हर ७ का भाग देने से निःशेष ही होगा, क्योंकि 'हरभक्ता यस्य कृति:–' ऐसा कहा है। और दूसरा खण्ड नी २८ रूपपद २ और २ से गुणित इष्टाङ्क ७ है, इसलिये 'शुध्यति सोऽपि द्विरूपपदगुणित:' यह कहा है। इष्टाङ्क, रूपपद और दो इन के घात में इष्टाङ्क का भाग देने से, लब्ध रूपपद और दो इन का घात आता है, वह निःशेष ही है। इस युक्ति से तीसरे पक्ष के मूल का पहले पक्ष के मूल के साथ समीकरण करने से, राशिज्ञान होना उचित है। क्योंकि वे तीनों पक्ष आपस में समान हैं।

अब 'न यदि पदं रूपाणां–' इस सूत्र खण्ड की व्याप्ति दिखलाने के लिये उदाहरण—

राशि या १ का वर्ग ३० से ऊन करने से याव १ रू ३̇० हुआ यह ७ के भाग देने से शुद्ध होता है इसलिये हर ७ और कल्पित लब्धि १ का घात का ७ भाज्य के तुल्य हुआ।

याव १ का ० रू ३̇०

याव ० का ७ रू ०

समशोधन से हुए—

याव १ का ० रू ०

याव ० का ७ रू ३०

पहले पक्ष का मूल या १ आया, दूसरे पक्ष में का ७ रू ३० 'हर भक्ता यस्य कृतिः' इसके अनुसार क्रिया करनी चाहिये। वहाँ रूप ३० के स्थान में मूलाभाव है। अब हार ७ तष्टित रूप २ में दूना हर २×७=१४ जोड़ देने से १६ हुआ। इसका मूल ४ आया, यह रूपपद हुआ। और इष्ट ७ का वर्ग ४९ हर ७ के भाग देने से शुद्ध होता है, वह ७ इष्टाङ्क है, दूना करने से १४ हुआ। रूपपद ४ से गुणने से ५६ हुआ। इसमें भी हर ७ का भाग देने से निःशेषता होती है। इसलिये इष्ट ७ से, अन्य वर्ण नीलक गुण देने से नी ७ हुआ। इसमें रूपपद ४ जोड़ने से नी ७ रू ४ हुआ। यह कल्पित तीसरे पक्ष का मूल है। अब इसके वर्ग का, दूसरे पक्ष के साथ समीकरण करने के लिये न्यास—

का ७ नीव ० नी ० रू ३०

का ० नीव ४९ नी ५६ रू १६

समशोधन से कालक का मान अभिन्न नीव ७ नी ८ रू २̇ आया। अब कल्पित तृतीय पक्ष नी ७ रू ४ का आद्यपक्षीय मूल या १ के साथ समीकरण करने से यावत्तावन्मान अभिन्न नी ७ रू ४ आया। नीलक का मान व्यक्त १ मान कर, उत्थापन देने से राशि ११ आई। इसी भाँति, कालकमान नीव ७ नी ८ रू २̇ में उत्थापन देते हैं—नीलकमान १ का वर्ग १ हुआ ७ से गुणने से ७ हुआ, इस में अष्टगुण मान ८×१=८ जोड़ने से १५ हुआ, इस में २̇ घटा देने से १३ कालक का मान आया।

आलाप—राशि ११ के वर्ग १२१ में ३० घटा कर शेष ९१ में ७ का भाग देने से शुद्धि होती है और लब्धि १३ कालकमान १३ के तुल्य आती है।

उपपत्ति—

यदि दूसरे पक्ष के रूपों का मूल न आता हो तो, उन में इस भाँति इष्टगुणित हर जोड़ना कि जिस में वर्गरूप हो जावें। जैसा—प्रकृत

उदाहरण में, दूसरा पक्ष का ७ रू ३० है। यहाँ रूप ३० हर ७ से तष्टित करने से २ रहा, इस म द्विगुण हर १४ जोड़ देने से १६ हुआ, यह वर्ग दूने हर से ऊन ३०−१४=१६ रूप के तुल्य है। अब इसके मूल ४ को यदि रूप ४ कल्पना करें तो, उस के वर्ग १६ का, दूसरे पक्ष के रूप ३० के साथ समशोधन करने से शेष १४ रहता है, यह दूने हर के तुल्य है। तब उस में अव्यक्त शेष हर ७ का भाग देने से, इष्ट २ लब्धि मिलेगी और शेष का अभाव होगा। इस भाँति यहाँ पर भी, मान अभिन्न सिद्ध होता है। यदि 'वर्ग इष्ट अङ्क से गुणित, क्षेप से युत वा ऊन और हर से भाजित निःशेष होता है' ऐसा आलाप हो तो, इष्टाङ्क गुणित हर को, द्वितीय वर्णाङ्क कल्पना करना। इस प्रकार उक्त रीति से उद्दिष्ट सिद्धि होगी।

उदाहरणम्-

षड्भिरूनो घनः कस्य पञ्च भक्तो विशुध्यति।
तं वदाशु तवालं चेदभ्यासो घनकुट्टके ॥९९॥

अत्र राशिः या १ अस्य यथोक्तं कृत्वाद्यपक्षस्य घनमूलं या १ परपक्षस्यास्य काघ ५ रू ६ 'हरभक्तो यस्य घनः शुध्यति सोऽपि त्रिरूपपदगुणितः-' इत्यादि युक्त्या नीलकपञ्चकस्य रूपषट्काधिकस्य घनेन साम्यं कृत्वा प्राग्वज्जातो राशिः सक्षेपः नी ५ रू ६ उत्थापने कृते जातो राशिः ६। वा ११।

अथ घनकुट्टके क्रियादर्शनार्थमुदाहरणमनुष्टुभाह—षड्भिरिति। कुट्टको हि गुणविशेष इत्युक्तं प्राक्। स इह घनरूपोऽस्ति

यथा पूर्वस्मिन्नुदाहरणे वर्गरूपः, अत्र कुट्टकवत्क्रियासाम्यात् 'वर्गकुट्टकः' 'घनकुट्टकः' इति कथ्यते । अन्वर्थेयं संज्ञा ॥

उदाहरण—

वह कौन राशि है, जिस के घन में छः घटा कर, पांच का भाग देने से निःशेष होती है ।

राशि या १ का घन याघ १ छ से ऊन याघ १ रू ६ पांच का भाग देने से शुद्ध होता है, इसलिये हर ५ और कल्पित लब्धि का १ का घात भाज्य के तुल्य हुआ—

याघ १ का ० रू ६

याघ ० का ५ रू ०

समशोधन से हुए—

याघ १

का ५ रू ६

पहले पक्ष का घनमूल या १ आया और दूसरे पक्ष का घनमूल नहीं आता इसलिये 'हरभक्तो यस्य घनः शुध्यति—' इसके अनुसार क्रिया करनी चाहिये । वहां रूप ६ का भी घनमूल नहीं आता तो, अब हार ५ से तष्टित रूप १ में तेंतालीस से गुणित हार ४३×५=२१५ को जोड़ने से २१६ घनमूल ६ आया, यह रूपपद हुआ । और इष्ट घन १२५ हर ५ के भाग देने से शुद्ध होता है, तथा इष्ट ५ तीन ३ और रूपपद ६ से गुणा ९० हर ५ के भाग देने से शुद्ध होता है, इसलिये इष्ट ५ से अन्य वर्ण नी १ गुणा देने से नी ५ हुआ । रूपपद ६ जोड़ने से नी ५ रू ६ हुआ । इसको तीसरे पक्ष के मूल स्थान में कल्पना किया । अब इसके घन का दूसरे पक्ष के साथ साम्य के लिये न्यास—

का ५ नीव ० नीव ० नी ० रू ६

का ० नीघ १२५ नीव ४५० नी ५४० रू २१६

समशोधन से हुए—

का ५

का ० नीव १२५ नीघ ४५० नी ५४० रू २१०

उक्तवत् कालक का मान अभिन्न नीघ २५ नीव ६० नी १०८ रू ४२ आया। और कल्पितमूल नी ५ रू ६ का पहले पक्ष के मूल या १ के साथ, समीकरण करने से यावत्तावन्मान नी ५ रू ६ आया। नीलक में एक का उत्थापन देने से राशि ११ आई। इसी भाँति, कालक मान 'नीघ २५ नीव ६० नी १०८ रू ४२' में नीलक का व्यक्तमान १ मान कर, उत्थापन देने से व्यक्त कालकमान २६५ हुआ।

आलाप—राशि ११ के घन १३३१ में ६ घटा कर १३२५ उस में ५ का भाग देने से, लब्धि २६५ कालक मान के तुल्य मिली॥

उदाहरणम्—

यद्वर्गः पञ्चभिः क्षुण्णस्त्रियुक्तः षोडशोद्धृतः।
शुद्धिमेति तमाचक्ष्व दक्षोऽसि गणितेयदि १००

अत्र राशिः वा १ अस्य यथोक्तं कृत्वाद्यपक्षमूलम् या ५ परपक्षस्यास्य का ८० रू १५ 'हित्वा क्षिप्त्वा च पदं यत्र—' इत्यादिनाप्यत्रालापित एव हरः स्थाप्यः, रूपाणि तु शोधनादिसिद्धानीति तथा कृते जातम् का १६ रू १५ अमुं नीलकाष्टकस्य सैकस्य वर्गेण समं कृत्वाप्तं कालकमानमभिन्नं नीव ४ नी १ रू १, कल्पितपदं नी ८ रू १ इदमाद्यस्यास्य या ५ समं कृत्वा कुट्टकाल्लब्धं यावत्तावन्मानम् पी ८ रू ५ उत्थापिते जातो राशिः १३।

अथवा ऋणरूपेणाधिके नीलाष्टके कल्पिते

सति लब्धं यावत्तावन्मानम् पी ८ रू ३ ।

एवं 'वर्गप्रकृत्या विषयो यथा स्यात्तथा सुधीभिर्बहुधा विचिन्त्यम्' इत्यस्य प्रपञ्चो बहुधा दर्शितः तथा वर्गकुट्टकेऽपि किंचिद्दर्शितम् । एवं बुद्धिमद्भिरन्यदपि यथासंभवं योज्यम् ॥

इति श्रीभास्करीये बीजगणितेऽनेकवर्णसम्बन्धिमध्यमाहरणभेदाः ॥

अथ 'हत्वा क्षिप्त्वा च पदं—' इत्यादेर्व्याप्तिं दर्शयितुमुदाहरणमनुष्टुभाह—यद्वर्ग इति । स्पष्टार्थमेतत् ।

इति द्विवेदोपाख्याचार्यश्रीसरयूप्रसादसुतदुर्गाप्रसादोन्नीते बीजविलासिन्यनेकवर्णमध्यमाहरणभेदाः ॥

उदाहरण—

वह कौन राशि है, जिस का वर्ग पांच से गुणा, तीन से जुड़ा और सोलह से भाजित शुद्ध होता है ।

राशि या १ का वर्ग याव १ पञ्चगुणा और त्रियुत याव ५ रू ३ हुआ, यह १६ के भाग देने से शुद्ध होता है, इसलिये हर १६ और लब्धि का १ का घात भाज्य के तुल्य हुआ—

याव ५ रू ३

का १६ रू ०

समशोधन से हुए—

याव ५ रू ०

का १६ रू ३̇

५ से गुणने से हुए—

याव २५ रू ०

का ८० रू १५̇

पहले पक्ष का मूल या ५ आया। दूसरे पक्ष का ८० रू १५̇ में मूल तथा रूपपद का अभाव है, इसलिये वहाँ पाठपठित हर का १६ लिया और रूप शोधनादि सिद्ध १५̇ ग्रहण किया। इस भाँति, दूसरे पक्ष का स्वरूप 'का १६ रू १५̇' हुआ। यहाँ हार १६ से तष्टित किये हुए रूप १५̇ में हर १६ जोड़ देने से १ शेष रहा, इसका मूल १ रूपपद है। और इष्ट ८ का वर्ग ६४ हर १६ के भागने से शुद्ध होता है तथा वही अंक ८ दो और रूपपद १ से गुणा १६ हर १६ के भाग देने से शुद्ध होता है। इसलिये उस इष्ट ८ से अन्य वर्ण नी १ को गुणा कर, उस में रूपपद १ जोड़ कर, दूसरे पक्ष के मूलस्थान में कल्पना किया। अब इसके वर्ग का दूसरे पक्ष का १६ रू १५̇ के साथ साम्य के लिये न्यास—

का १६ नीव ० नी ० रू १५̇

का० नीव ६४ नी १६ रू १

समशोधन से हुए—

का १६ नीव ० नी ० रू ०

का ० नीव ६४ नी १६ रू १६

उक्त रीति से कालक मान नीव ४ नी १ रू १ आया। कल्पित मूल नी ८ रू १ का पहले पक्ष के मूल या ५ के साथ समीकरण करने से, यावत्तावत् का मान भिन्न $\frac{\text{नी ८ रू १}}{\text{या ५}}$ आया। इसका अभिन्न मान जानने के लिये कुट्टक के लिए न्यास—

भा० ८। क्षे० १ वल्ली १

हा० ५।

१

१

१

०

उससे दो राशि ३ । २ वल्ली के विषम होने से, अपने अपने हार में शुद्ध करने से लब्धि ५ और गुण ३ हुआ। लब्धि भाजकवर्ण यावत्तावत् का मान और गुण नीलक का मान हुआ। पीतक १ इष्ट मानने से 'इष्टाहत—' इस के अनुसार सक्षेप हुए—

पी ८ रू ५ यावत्तावत्

पी ५ रू ३ नीलक

पीतक में शून्य का उत्थापन देने से यावत्तावन्मान ५ आया, यही राशि है। वा, पीतक में एक का उत्थापन देने से राशि १३ आई। यहाँ कालक मान में उत्थापन देने से, वह लब्धि के तुल्य नहीं आता और दूसरे पक्ष का कल्पितमूल के साथ साम्यक्रिया भी संदिग्ध है, क्योंकि हर पाठपठित और रूप शोधनादि सिद्ध ग्रहण किये गये हैं। इसलिये अब असंदिग्ध कहते हैं—

राशि या १ वर्ग पञ्चगुण और त्रियुत भाज्य याव ५ रू ३ हुआ, यह १६ के भाग देने से निरग्र होता है। इसलिये हर १६ और कल्पित लब्धि कालक का पञ्चमांश का $\frac{1}{5}$ इन का घात भाज्य के तुल्य हुआ—

याव ५ का ० रू ३

याव ० का $\frac{16}{5}$ रू ०

समच्छेद और छेदगम से हुए—

याव २५ का ० रू १५

याव ० का १६ रू ०

समशोधन से हुए—

याव २५ का ० रू ०

याव ० का १६ रू १५

पहले पक्ष का मूल या ५ आया, दूसरे पक्ष का १६ रू १५ में पहला खण्ड पाठपठित हर के तुल्य है और दूसरा शोधनादि सिद्ध रूप के तुल्य है। यहाँ उक्त रीति के अनुसार, यावत्तावन्मान पी ८ रू ५ कालक मान नीव ४ नी १ रू और नीलक मान पी ५ रू ३ आया। यावत्तावत् और नीलक के मान में पीतक में शून्य से उत्थापन देने से यावत्तावत् और नीलक का मान व्यक्त मिला ५ । ३ और नीलक

मान ३ से कालकमान नीव ४ नी १ रू १ में उत्थापन देने में, व्यक्त कालक मान ४० आया। इस में हर ५ का भाग देने से लब्धि का प्रमाण ८ मिला। जैसा—यावत्तावन्मान ५ के तुल्य राशि ५ के वर्ग २५ को ५ से गुण कर उसमें ३ जोड़ देने से १२८ हुआ, इस में हर १६ का भाग देने से वही ८ लब्धि आती है।

'आलापित एव हरः' ऐसा जो नियम किया है, वह लाघव के लिये है अन्यथा शोधनादि सिद्ध हर से भी वही बात सिद्ध होती है। जैसा—उक्त रीति के अनुसार पक्ष हुए—

याव ५ का ० रू ३
याव ० का १६ रू ०

समशोधन करने से—

याव ५ का ० रू ०
याव ० का १६ रू ३̇

५ से गुणने से—

याव २५ का ० रू ०
याव ० का ८० रू १५̇।

पहले पक्ष का मूल या ५ आया, दूसरे में गुण से गुणित हर, रूप है। अब, हर ८० तष्ट रूप १५̇ में त्रिगुण हर २४० जोड़ने से २२५ इस का मूल १५ रूपपद हुआ। इष्ट ४० का वर्ग १६०० हर ८० का भाग देने से शुद्ध होता है तथा इष्ट ४० दो से और रूपपद १५ से गुणा हर ८० के भाग देने से शुद्ध होता है। अब इष्टाङ्क ४० से अन्य वर्ण नी १ को गुण कर, उसमें रूप १५ जोड़ देने से, कल्पित मूल नी ४० रू १५ हुआ। इस के वर्ग का दूसरे पक्ष के साथ साम्य के लिये न्यास—

का ८० नीव ० नी ० रू १५̇
का ० नीव १६०० नी १२०० रू २२५

समशोधन करने से—

का ८० नीव ० नी ० रू ०
का ० नीव १६०० नी १२०० रू २४०

उक्त रीति से कालकमान अभिन्न नीव २० नी १५ रू ३ आया। और कल्पित मूल नी ४० रू १५ का आद्यपक्ष के मूल या १६ के साथ साम्य करने से यावत्तावन्मान नी ८ रू ३ आया। नीलक में शून्य ० का उत्थापन देने से राशि ३ हुई। और कालक मानान्तर्गत 'नीव २० नी १५ रू ३' नीलक वर्ग में शून्य ० का उत्थापन देने से कालक मान ३ आया और नीलकमान १ मानने से यावत्तावन्मान ११ और कालक मान ३८ आया।

अथवा 'तेनाहतोऽन्यवर्गो रूपपदेनान्वितः कल्प्यः' इस स्थान में 'स्वमूले धनर्णे' इस के अनुसार, रूपपद ऋण ग्रहण किया नी ४० रू १५, इस के वर्ग का, दूसरे पक्ष के साथ समीकरण करने से, कालकमान 'नीव २० नी १५ रू ३' आया। और कल्पितमूल नी ४० रू १५ का आद्यपक्ष के मूल या ५ के साथ साम्य करने से, यावत्तावन्मान नी ८ रू ३ आया। नीलक में १ का उत्थापन देने से यावत्तावन्मान ५ और कालक मान ८ आया॥

अनेकवर्णमध्यमाहरण समाप्त—

दुर्गाप्रसादरचिते भाषाभाष्ये मिताक्षरे।
पूर्तिं गतानेकवर्णमध्यमाहरणक्रिया॥

अथ भावितं तत्र सूत्रं वृत्तम्-

मुक्त्वेष्टवर्णं सुधिया परेषां
कल्प्यानि मानानि तथेप्सितानि ।
यथा भवेद्भावितभङ्ग एवं
स्यादाद्यबीजक्रिययेष्टसिद्धिः ॥ ८६ ॥

यत्रोदाहरणे वर्णयोर्वर्णानां वा वधाद्भावित-मुच्यते तत्रेष्टं वर्णमपहाय शेषयोः शेषाणां वा वर्णानामिष्टानि व्यक्तानि मानानि कृत्वा तैस्तान् वर्णान् पक्षयोरुत्थाप्य रूपेषु प्रक्षिप्यैवं भावितभङ्गं कृत्वा प्रथमबीजक्रियया वर्णमान-मानयेत् ॥

अथ भावितं व्याख्यायते-

अथ क्रमप्राप्तं भावितसंज्ञमनेकवर्णविशेषमुपजातिकयाह—मुक्तेति । स्पष्टार्थमिदं विवृतं चापि ग्रन्थकारैः ॥

भावित ।

अब क्रमप्राप्त भावित नामक अनेकवर्ण के विशेष का निरूपण करते हैं—

जिस उदाहरण में दो वा, अनेकवर्णों के घात से भावित उत्पन्न हो, वहां पर इष्ट वर्ण को छोड़ कर और वर्णों के ऐसे अभिमत व्यक्तमान कल्पना करना कि जिस में भावित का भङ्ग अर्थात् नाश हो । और दोनों पक्षों के वर्णों में उन व्यक्तमान से उत्थापन देना फिर एकवर्ण समीकरण की रीति के अनुसार इष्टसिद्धि होगी ॥

उदाहरणम्—

चतुस्त्रिगुणयो राश्योः संयुतिर्द्वियुता तयोः ।
राशिघातेन तुल्या स्यात्तौ राशी वेत्सि चेद्वद ॥

अत्र राशी या १ । का १ अनयोर्यथोक्ते कृते जातौ पक्षौ

या ४ का ३ रू २
या का भा १

एवं भाविते जाते 'मुक्त्वेष्टवर्णं—' इत्यादि-सूत्रेण कालकस्य किलेष्टं रूपपञ्चकं मानं कल्पितं तेन प्रथमपक्षे कालकमुत्थाप्य रूपेषु प्रक्षिप्य जातम् या ४ रू १७ द्वितीयपक्षे या ५ अनयोः समशोधने कृते प्राग्वल्लब्धं याव-त्तावन्मानम् १७ एवमेतौ जातौ राशी १७।५ अथवा षट्केन कालकमुत्थाप्य जातौ राशी १० । ६ एवमिष्टवशादानन्त्यम् ॥

उदाहरण—

जिन दो राशियों का चार और तीन से गुणित योग, दो से युक्त उन के घात के तुल्य होता है, वे दो कौन राशि हैं ।

चार और तीन से गुणित राशियों या ४ का ३ का, योग दो से जुड़ा या ४ का ३ रू २ उन के घात के तुल्य हुआ—

या ४ का ३ रू २
या का भा १

समशोधन से पक्ष ज्यों के त्यों रहे। यहाँ आद्य पक्ष में दो वर्ण हैं, उनमें से पहले वर्ण यावत्तावत् को छोड़कर, दूसरे कालक वर्ण का व्यक्तमान ५ कल्पना किया। फिर १ कालक का ५ व्यक्तमान, तो ३ का क्या ? १५ हुआ, इसमें रूप २ जोड़ने से आद्यपक्ष का स्वरूप या ४ रू १७ हुआ, और कालक मान ५ को पहले राशि या १ से गुण देने से दूसरे पक्ष का स्वरूप या ५ हुआ। इनका समीकरण के लिये न्यास—

या ४ रू १७
या ५ रू ०

उक्तवत् यावत्तावन्मान १७ आया और कालकमान ५ व्यक्त ही कल्पना किया था। इस भाँति राशि १७। ५ हुई। कालकमान ६ मानने से उक्त रीति के अनुसार राशि १०। ६ हुई॥

उदाहरणम्—

चत्वारो राशयः के ते यद्योगो नखसंगुणः।
सर्वराशिहतेस्तुल्यो भावितज्ञ निगद्यताम्॥

अत्र राशिः या १ शेषा दृष्टाः ५।४।२। अतः प्रथमबीजेन लब्धं यावत्तावन्मानम् ११। एवं जाता राशयः ११।५।४।२। वा २८।१०।३।१। वा ५५।६।४।१। वा ६०।८।३।१। एवं बहुधा॥

उदाहरण—

वे चार कौन राशि हैं, जिन का योग बीस से गुणित उन के घात के तुल्य होता है।

पहली राशि या १ है और शेष राशियों का मान व्यक्त कल्पना

किया ५ । ४ । २ इनका योग या १ रू ११ बीस से गुणा या २० रू २२० सर्वराशि-घात या ४० के तुल्य है—

या २० रू २२०

या ४० रू०

समशोधन से पहली राशि का मान ११ आया । और राशियों का मान व्यक्त कल्पना किया उन का क्रम से न्यास ११ । ५ । ४ । २ । इसी भाँति शेष राशि १० । ३ । १ वा ६ । ४ । १ वा ८ । ३ । कल्पना करने से पहली राशि २८ वा ५५ । वा ६० हुई ॥

उदाहरणम्—

यौ राशी[1] किल या च राशिनिहतिर्यौ राशिवर्गौ तथा तेषामैक्यपदं सराशियुगलं जातं त्रयोविंशतिः । पञ्चाशत्त्रियुताथवा वद कियत्तद्राशियुग्मं पृथक् तज्ज्ञाभिन्नमवेहि वत्स गणकः कस्त्वत्समोऽस्ति क्षितौ १०३ ॥

अत्र राशी या १ । रू २ । अनयोर्घातयुतिवर्गाणां योगः याव १ या ३ रू ६ इमं राशियोगोनत्रयोविंशतेः या १ रू २१ वर्गस्यास्य

---

१. ज्ञानराजदैवज्ञाः—

राश्योर्या वियुतिर्युतिश्च निहतिस्तद्वत्कृतिस्तद्युति-
स्तन्मूलं समभूत्सराशियुगलं सप्ताधिका विंशतिः ।
योगो युग्मयुगघ्नयोः शशियुतः स्याद्राशिघातोन्मित—
स्तौ राशी वद शास्त्रविस्तृतमते सद्भावितं वेत्सि चेत् ॥ राशी ६,५ । राशी ७,२ ॥

याव १ या ४२̇ रू ४४१ समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानम् २६/३ एवमेतौ राशी २६/३ । २ । अथवा राशी या १ । रू ३ । अतः प्राग्वज्जातौ राशी ६७/११ । ३ ।

अथ द्वितीयोदाहरणे राशी या १ । रू २ । अनयोर्घातयुतिवर्गाणां योगः याव १ या ३ रू ६ अमुं राशिद्वयोनात्रिपञ्चाशद्वर्गस्यास्य याव १ या १०६̇ रू २६०१ समं कृत्वा प्राग्वज्जातौ राशी १७३/७ । २ । वा ११ । १७ । एवमेकस्मिन् व्यक्ते राशौ कल्पिते सति बहुनायासेनाभिन्नौ राशी ज्ञायेते ॥

अथ शिष्यबुद्धिप्रसारार्थमन्यदुदाहरणद्वयं शार्दूलविक्रीडितेनाह—याविति । स्पष्टार्थमेतत् ॥

उदाहरण—

वे दो राशि कौन हैं, जो राशि और उन का घात तथा वर्ग के योग मूल में [illegible] ही दो राशि जोड़ देने से, तेईस अथवा तरेपन होते हैं ।

कल्पना किया पहली राशि या १ और दूसरी व्यक्त २ है । इन का घात या २ हुआ और इन के वर्ग याव १ । रू ४ अब राशि या १ । रू २ । घात या २ और इन के वर्ग याव १ । रू ४ का योग 'याव १ या ३ रू ६' हुआ । इस के मूल में दो राशि जोड़ देने से तेईस होते हैं, तो विलोमविधि के अनुसार, दोनों राशि या १ । रू २ के योग को २३ में घटा देने से, शेष या १̇ रू २१ रहा, इसका वर्ग याव १ या ४२̇ रू ४४१ पहले योग के तुल्य है, इसलिये समीकरण के लिये न्यास—

याव १ या ३ रू ६

याव १ या ४२ रू ४४१

समशोधन से यावत्तावत् का मान रू ४३५/४५ पंद्रह के अपवर्तन देने से २९/३ हुआ । यह पहली राशि है और दूसरी व्यक्त २ है । यदि दूसरी राशि ३ कल्पना करें, तो पहली राशि ६७/१ आई । इसी भाँति यदि दूसरी राशि का मान व्यक्त ५ कल्पना करें, तो पहली राशि ७ हुई ।

दूसरे उदाहरण में, या १ । रू २ राशि है, इनका घात या २ हुआ, और इन के वर्ग याव १ । रू ४ अब राशि या १ । रू २ इनके घात या २ और वर्ग याव १ । रू ४ का योग, याव १ या ३ रू ६ हुआ, इसके मूल में, वे दो राशि जोड़ देने से तरेपन होते हैं, तो विलोम-विधि के अनुसार ५३ में दोनों राशि के योग या १ रू २ को घटा देने से शेष या १ रू ५१ रहा, इस का वर्ग याव १ या १०२ रू २६०१ पहले योग के तुल्य है, इसलिये समीकरण के लिये न्यास—

याव १ या ३ रू ६

याव १ या १०२ रू २६०१

समशोधन से यावत्तावन्मान रू २५९५/१०५ में १५ का अपवर्तन देने से पहली राशि १७३/७ हुई और दूसरी २ है । इसी भाँति, यदि दूसरी राशि का मान व्यक्त १७ कल्पना करें तो पहली राशि १[illegible] अभिन्न आता है । इस प्रकार, एक राशि का व्यक्तमान मानने से, बड़े प्रयास से अभिन्न राशी जानी जाती हैं ॥

अथ तौ यथाल्पायासेन भवतस्तथोच्यते—

तत्र सूत्रं सार्धवृत्तद्वयम्—

भावितं पक्षतोऽभीष्टात्त्यक्त्वा वर्णौ सरूपकौ ॥

अन्यतो भाविताङ्केन ततः पक्षौ विभज्य च ।

वर्णाङ्काहतिरूपैक्यं भक्तेष्टेनेष्ट तत्फले ॥ ८८॥
एताभ्यां संयुतावूनौ कर्तव्यौ स्वेच्छया च तौ।
वर्णाङ्कवर्णयोर्माने ज्ञातव्ये ते विपर्ययात् ८९॥

समयोः पक्षयोरेकस्माद्भावितमपास्यान्यतो वर्णौ रूपाणि च ततो भाविताङ्केन पक्षावपवर्त्य द्वितीयपक्षे वर्णाङ्कयोर्घातं रूपयुतेन केनचिदिष्टेन विभज्य तदिष्टं तत्फलं च द्वे अपि वर्णाङ्काभ्यां स्वेच्छया युक्ते सती वर्णयोर्माने विपर्ययेण ज्ञातव्ये, यत्र कालकाङ्को योजितस्तद्यावत्तावन्मानम्, यत्र यावत्तावदङ्कस्तत्कालकमानमित्यर्थः। यत्र तु इयत्तावशादेवं कृते सत्यालापो न घटते तत्रेष्टफलाभ्यां वर्णाङ्कावूनितौ व्यत्ययान्माने भवतः ॥

अथ यथाल्पायासेनैव राशिमानमभिन्नं सिध्यति तथा सार्धानुष्टुब्द्वयेनाह—भावितमिति ॥ अस्यार्थ आचार्यैरेव व्याख्यातः ॥

अब अल्प प्रयास से अभिन्न राशि ज्ञान की रीति कहते हैं—

तुल्य दो पक्षों में से, अभीष्ट एक पक्ष में, भावित को घटा कर, दूसरे पक्ष में सरूप वर्णों को घटा देना और पक्षों में भाविताङ्क का भाग देकर वर्णाङ्कघात और रूप के योग में इष्टाङ्क का भाग देना और इष्टाङ्क तथा इष्टभक्त फल को दो स्थान में रखना उन (इष्ट-फल) को वर्णाङ्क में अपनी इच्छा से जोड़ या घटा देने से वे व्यत्यय से वर्णों के मान होंगे। अर्थात् जहां कालक वर्णाङ्क जोड़ा गया है, वहां पर यावत्तावत्

का मान होगा और जहां यावत्तावद्वर्णाङ्क जोड़ा गया है, वहां कालक का मान होगा।

अथ प्रथमोदाहरणम्—'चतुस्त्रिगुणयो राश्योः संयुतिर्द्वियुता तयोः। राशिघातेन तुल्या—' इति। तत्र यथोक्ते कृते पक्षौ

या ४ का ३ रू २

या का भा १

वर्णाङ्काहतिरूपैक्यम् १४ एतदेकेनेष्टेन हृतं जाते इष्टफले १। १४। एते वर्णाङ्काभ्यां ४।३ स्वेच्छया युते जाते यावत्तावत्कालकमाने ४। १८ वा १७।५ द्विकेन जाते ५।११ वा।१०।६।

'चतुस्त्रिगुणयोः—' इस पहले उदाहरण के अनुसार तुल्य पक्ष हुए—

या ४ का ३ रू २

या का भा १

यहां वर्णाङ्क ४। ३ घात १२ हुआ इस में रूप २ जोड़ने से १४ हुआ। इस में इष्ट १ का भाग देने से फल १४ आया। अब इष्ट १ और फल १४ क्रम से वर्णाङ्क ४। ३ में जोड़ देने से कालक का मान ५ और यावत्तावत् का मान १७ आया। अथवा, इष्ट १ और फल १४ को कालक यावत्तावद्वर्णाङ्क ३। ४ में जोड़ने से, उन के मान ४। १८ हुए। इसलिये 'एताभ्यां संयुतावूनौ कर्तव्यौ स्वेच्छया च तौ' यह कहा है। अथवा, वर्णाङ्क घात १२ और रूप २ के योग १४ में इष्ट २ का भाग देने से, फल ७ आया। अब इष्ट २ और फल ७ को कालक और यावत्तावत् के अङ्क ३। ४ में जोड़ देने से यावत्तावत् और कालक के मान ५। ११ हुए।

भावितोपपत्ति-

समान पक्षों में समान ही घटाने से उन का समानत्व नष्ट नहीं होता, इसलिये पक्षों में भावित समान घटाया है, फिर पक्षों में अन्यपक्ष समान घटाया है। इस प्रकार, पक्ष भावित के समान होगा। यदि भावित किसी अङ्क से गुणित हो तो उस भाविताङ्क का पक्षों में भाग देकर, पक्ष को भावित के समान बनाना। फिर राशि जानने के लिये यावत्तावत् और कालक राशि कल्पना किया तथा अव्यक्तों के अङ्क को क्रम से य और क मान लिये, तब पक्ष भावित के समान हुआ—

या. य १ का. क १ रू १
या का भा १

'आद्यं वर्णं शोधयेदन्यपक्षात्—' के अनुसार शोधन करने से—

का. क १ रू १
या. य १̇ या का भा १

अथवा—

का. क १ रू १
या (का १ य १̇)

अपवर्तन देने से—

$$\frac{\text{का. क १ रू १}}{\text{का १ य १̇}} = \text{या १}$$

भाग देने से—

का १ य १̇) का.क१ रू १ (क १
का.क१ क.य१̇
क.य१ रू१

$$\frac{\text{क. य १ रू १}}{\text{का १ य १̇}}$$

कल्पना किया—

$$\frac{\text{क.य१ रू १}}{\text{का १ य १̇}} = \text{फल}।$$

का १ य १̇ = इष्ट।

वर्णाङ्काहतिरूपैक्य=क.य१ रू १ = फ. इ।

यहां कालकाङ्क तुल्य क में फल को जोड़ देने से, यावत्तावत् का

मान सिद्ध होता है और इष्ट में यावत्तावत् अङ्क के तुल्य य को जोड़ देने से कालक का मान सिद्ध होता है—

या १ = क १ फ १ । का १ = इ १ य १

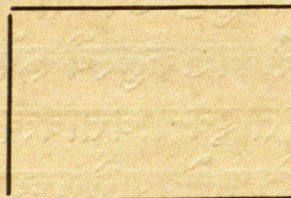
यदि इष्ट और फल ऋण हों तो, उन का घात धन होगा। उस अवस्था में ऋण इष्ट तथा फल से वर्णाङ्क को युक्त करने से उन का अन्तर होगा—

या १ = क १ फ १̇ । का १ = य १ इ १̇

इससे 'भावितं पक्षतोऽभीष्टात्—' इत्यादि सूत्र उपपन्न हुआ। यह उपपत्ति श्री ६ बापुदेवशास्त्रिकृत है। यहां आचार्योक्त उपपत्ति संप्रदायाविच्छेद से गड़बड़ हो गई है।

अस्योपपत्तिः—

सा च द्विधा सर्वत्र स्यात्। एका क्षेत्रगता अन्या राशिगतेति। तत्र क्षेत्रगतोच्यते—द्वितीयपक्षः किल भावितसमो वर्तते भावितं त्वायतचतुरस्रक्षेत्रफलं तत्र वर्णौ भुजकोटी

न्यासः या १

का १

अत्र क्षेत्रान्तर्यावच्चतुष्टयं वर्तते कालकत्रयं द्वे रूपे। अतः क्षेत्राद्यावत्तावच्चतुष्टये रूपचतुष्टयोने कालके स्वाङ्कगुणे चापनीते जातम्

द्वितीयपक्षे च तथा कृते जातम् १४ एत-द्भावितक्षेत्रान्तर्वर्तिनोऽवशिष्टक्षेत्रस्याधस्तन-स्य फलं तद्भुजकोटिवधाज्जातं ते चात्र ज्ञात-व्ये। अत इष्टो भुजः कल्पितस्तेन फलेऽस्मिन् १४ भक्ते कोटिर्लभ्यते अनयोर्भुजकोट्योरेक-तरा यावत्तावदङ्कतुल्यै रूपै ४ रधिकतरा सती भावितक्षेत्रस्य कोटिर्भवति यतो भावित-क्षेत्रस्य यावत्तावच्चतुष्टयेऽपनीते तत्कोटिश्च-तुरूपा जाता एवं कालकतुल्यै रूपै ३ रधिक-तरो भुजो भवति त एव यावत्तावत्कालकमाने।

अथ राशिगतोपपत्तिरुच्यते-

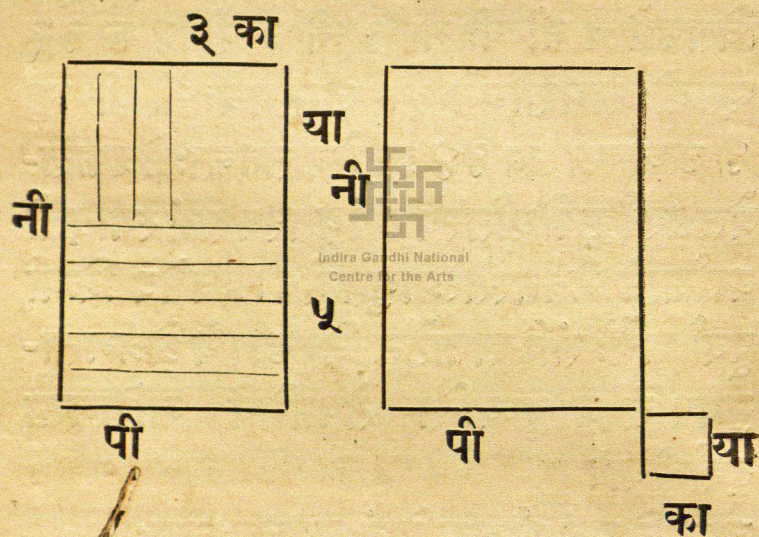
सापि क्षेत्रमूलान्तर्भूता तत्र यावत्तावत्का-लकभुजकोटिमानात्मकक्षेत्रान्तर्गतस्य लघु-क्षेत्रस्य भुजकोटिमानेऽन्यवर्णौ कल्पितौ नी १।

पी १। अत एतयोरेकतरो यावत्तावदङ्कतुल्यै रूपैरधिको बहिःक्षेत्रकोटेः कालकस्य मानमन्यः कालकतुल्यै रूपैरधिको भुजस्य यावत्तावतो मानं कल्पितम् नी १ रू ४। पी १ रू ३। आभ्यां पक्षयोर्यावत्तावत्कालकवर्णावुत्थाप्योपरितनपक्षे नी ३ पी ४ रू २६ भावितपक्षे च नी पी भा १ नी ३ पी ४ रू १२ एतयोः समशोधने कृते जातमधः नी पी भा १ ऊर्ध्वपक्षे रू १४ इदमेव तदन्तःक्षेत्रफलमेतद्वर्णाङ्कयोर्घातस्य रूपयुतस्य समं स्यादतो वर्णमाने भवतस्तत्प्रागुक्तमेव। इयमेव क्रिया पूर्वाचार्यैः संक्षिप्तपाठेन निबद्धा। ये क्षेत्रगतामुपपत्तिं न बुध्यन्ति तेषामियं राशिगता दर्शनीया।

उपपत्तियुतं बीजगणितं गणका जगुः।
न चेदेवं विशेषोऽस्ति न पाटीबीजयोर्यतः ६०

अत इयं भावितोपपत्तिर्द्विविधा दर्शिता। यत्तूक्तं वर्णाङ्कयोर्घातोरूपैर्युतो भावितक्षेत्रान्तर्वर्तिनोऽन्यस्य लघुक्षेत्रस्य कोणस्थस्य फलमिति तत्क्वचिदन्यथा स्यात्। यथा यदा

वर्णाङ्कौ ऋणगतौ भवतस्तदा तस्यैवान्तर्भावितक्षेत्रं कोणस्थं स्यात्। यदा तु भावितक्षेत्रे भुजकोटिभ्यां वर्णाङ्कावधिकौ धनगतौ भवतस्तदा भावितक्षेत्राद् बहिःकोणस्थं क्षेत्रं स्यात्तद्यथा-

न्यासः

यदीदृशं तदेष्टफलाभ्यामूनितौ वर्णाङ्कौ यावत्तावत्कालकयोर्माने भवतः

उदाहरणम्-

द्विगुणेन कयो राश्योर्घातेन सदृशं भवेत्।
दशेन्द्राहतराश्यैक्यं द्व्यूनषष्टिविवर्जितम्॥

अत्र राशी या १ । का १ । अनयोर्यथोक्ते कृते भाविताङ्केन भक्ते जातम् या ५ का ७ रू २९ अत्र वर्णाङ्काहतिरूपैक्यं ६ द्विहृतमिष्टफले २ । ३ । आभ्यां वर्णाङ्कौ युतौ राशी १० । ७ वा ९ । ८ वा ऊनितौ जातौ ४ । ३ वा ५ । २ ॥

अथ त्रयाणामपि धनत्वे 'चतुस्त्रिगुणयोः—' इत्युदाहरणं प्रदर्शितम् । अथ यत्र वर्णाङ्कौ धनं रूपाणि ऋणं स्युस्तादृशमुदाहरणमनुष्टुभाह—द्विगुणेनेति । उत्तानाशयः ॥

उदाहरण—

वे दो कौन राशि हैं, जिन का दूना घात अट्ठावन से ऊन, दस और चौदह से गुणित उन्हीं राशियों के योग के समान होता है ।

राशि या १, का १ हैं इन का दूना घात या का भा २ । १० और १४ से गुणित या १० का १४, इन्हीं राशियों के ५८ से घटे हुए योग या १० का १४ रू ५८̇ के तुल्य होता है, इसलिये साम्य करने के लिए न्यास—

या १० का १४ रू ५८̇

या का भा २

'भाविताङ्केन ततः पक्षौ विभज्य च' इस के अनुसार भाविताङ्क २ के भाग देने से हुए—

या ५ का ७ रू २९̇

या का भा १

और वर्णाङ्क ५ । ७ का घात ३५ हुआ, इसमें 'धनर्णयोरन्तरमेव योगः' के अनुसार, २९̇ जोड़ देने से शेष ६ रहा । इस में इष्ट २ का भाग देने से ३ फल आया । अब इष्ट २ और फल ३ को वर्णाङ्क ५ में जोड़ देने से, व्यत्यय से उन के मान १० । ७ हुए । अथवा ९ । ८ हुए । और इष्ट २ तथा फल ३ को वर्णाङ्क ५ । ७ में घटा देने से व्यत्यय से उन के मान ४ । ३ अथवा ५ । २ हुए ।

उदाहरणम्—

त्रिपञ्चगुणराशिभ्यां युतो राश्योर्वधः कयोः।
द्विषष्टिप्रमितो जातस्तौ राशी वेत्सि चेद्वद ॥

अत्र यथोक्ते कृते जातौ पक्षौ

या ३ का ५ रू ६२
या का भा १

वर्णाङ्काहतिरूपैक्यम् ७७ इष्टतत्फले ७।११ आभ्यां वर्णाङ्कौ युतावेव इष्टतत्फलाभ्यामाभ्यां ७।११ ऊनितौ चेद्विधीयेते तदा ऋणगतौ भवतः अत आभ्यां ७।११ युतौ जातौ राशी ६।४ वा २।८ ऊनितौ १२।१४।१६।१०

अथ यत्र वर्णाङ्कावृणं रूपाणि तु धनं स्युस्तादृशमुदाहरणमनुष्टुभाह—त्रिपञ्चेति। स्पष्टोऽर्थः॥

उदाहरण—

वे दो राशि कौन हैं, जिन का घात त्रिगुण तथा पञ्चगुण राशि जोड़ देने से, बासठ के तुल्य होता है।

कल्पना किया या १ । का १ राशि हैं। इन का घात या का भा १ हुआ। इसमें ३ और ५ से गुणित उन राशियों को जोड़ देने से, या ३ का ५ याकाभा १ यह योग ६२ के तुल्य हुआ—

या ३ का ५ याकाभा १
रू ६२

'भावितं पक्षतोऽभीष्टात्—' इस सूत्र के अनुसार—

या ० का ० याकाभा १
या ३ का ५ रू ६२

वर्णाङ्कों ३ । ५ का घात धन १५ हुआ । इस में रूप ६२ जोड़ देने से ७७ हुआ । इसमें इष्ट ७ का भाग देने से, फल ११ आया । अब इष्ट ७ और फल ११ को वर्णाङ्क में युक्त करना चाहिये । क्योंकि उन को यदि घटा देंगे तो, राशि ऋणागत आवेंगी । इसलिये जोड़ देने से व्यत्यय से वर्णों के मान ६।४ अथवा २ । ८ हुए । और घटा देने से ऋणागत मान १२ । १४ अथवा १६ । १० मिले ।

अथ पूर्वचतुर्थोदाहरणम्—'यौ राशी किल या च राशिनिहतिर्यौ राशिवर्गौ तथा तेषामैक्यपदं सराशियुतं' इति । अत्र राशी या १। का १ । अनयोर्घातयुतिवर्गाणां योगः याव १ काव १ याकाभा १ या १ का १ अस्य मूलाभावाद्राशिद्वयोनत्रयोविंशतेः या १ का १ रू २३ वर्गेणानेन याव १ काव १ याकाभा २ या ४६ का ४६ रू ५२९ साम्यं तत्र समयोगवियोगादौ समतैवेति समवर्गगमे शोधने च कृते भाविताङ्केन हृते जातम् या ४७ का ४७ रू ५२९ अत्र वर्णाङ्काहती रूपयुता १६८० इयं चत्वारिंशतेष्टेन हृता फलम् ४२ इष्टम् ४० अत्रेष्टफलाभ्यामाभ्यां वर्णाङ्कावूनावेव कार्यौ, तेन जातौ राशी ७। ५ युतौ चेत्क्रियेते तर्हि 'जातं त्रयोविंशतिः' इति पूर्वालापो न घटते ॥

अथ यत्र रूपाणामृणत्वे मकाराभ्यामुत्पन्नयोर्मानयोरेकतरे एवोपपन्ने भवतस्तादृशमुदाहरणं पूर्वचतुर्थमस्तीति तदेव प्रदर्शयति- याविति ॥

'यौ राशी किल-' इस पूर्व उदाहरण में या १। का १ राशि कल्पना किया, उन का घात याकाभा १ हुआ और उन के वर्ग याव १। काव १ हुए। इन सब का योग याव १ काव १ याकाभा १ या १ का १ इन्हीं दोनों राशि से घटे हुए तेईस के वर्ग 'याव १ काव १ याकाभा २ या ४६ का ४६ रू ५२९' के तुल्य है, इस कारण समीकरण के लिये न्यास—

याव १ काव १ याकाभा १ या १ का १ रू ०

याव १ काव १ याकाभा २ या ४६ का ४६ रू ५२९

'भावितं पक्षतोऽभीष्टात्—' के अनुसार क्रिया करने से हुए—

या ४७ का ४७ रू ५२९

याकाभा १

वर्णाङ्कों ४७।४७ का घात २२०९ हुआ। इस में ऋण रूप ५२९ जोड़ देने से १६८० शेष रहा। इस में इष्ट ४० का भाग देने से फल ४२ आया। अब इष्ट ४० और फल ४२ को वर्णाङ्क ४७। ४७ में घटा देने से राशि ७। ५ आई। और यदि इष्ट ४० तथा फल ४२ को वर्णाङ्क ४७। ४७ में जोड़ दें तो 'जातं त्रयोविंशतिः' यह आलाप नहीं घटेगा ॥

चतुर्थोदाहरणम्[१]- 'पञ्चाशत्त्रियुताथवा-' इति। अत्रोदाहरणे यथोक्तकृतभाविताङ्केनविभक्ते जातम् या १०७ का १०७ रू २८०९ अत्र वर्णाङ्काहतिरूपैक्यम् ८६४० इष्टतत्फले ९०।

---

१ कुत्रचिन्मूलपुस्तके 'पूर्वोदाहरणम्' इति पाठः।

९६ आभ्यां वर्णाङ्कावूनितौ राशी ११ । १७ एवमन्यत्रापि ॥

क्वचिद्बहुषु साम्येषु भावितोन्मितीरानीय ताभ्यः समीकृतच्छेदगमाभ्यः साम्ये पूर्वबीजक्रिययैव राशी ज्ञायेते । अत्र 'राशी' इति द्विवचनोपादानादन्येषामादिवर्णानामिष्टानि मानानि कल्प्यानीत्यर्थात्सिद्धम् ॥

इति श्रीभास्करीये बीजगणिते भावितम् ॥

इति द्विवेदोपाख्याचार्यश्रीसरयूप्रसादसुत-दुर्गाप्रसादोन्नीते बीजविलासिनि भावितं समाप्तम् । इति शिवम् ॥

'पञ्चाशत्त्रियुताथवा——' इस चौथे उदाहरण में, उक्त रीति के अनुसार समान पक्ष सिद्ध हुए——

याव १ काव १ या का भा १ या १ का १ रू ०

याव १ काव १ या का भा २ या १०६ का १०६ रू २८०९

'भावितं पक्षतोऽभीष्टात्——' इसके अनुसार क्रिया करने से हुए—

या १०७ का १०७ रू २८०९

या का भा १

वर्णाङ्कों १०७ । १०७ का घात ११४४९ हुआ । इसमें ऋण २८०९ जोड़ देने से, शेष ८६४० रहा । इसमें इष्ट ९० का भाग देने से ९६ लब्धि आई । अब इष्ट ९० और लब्धि ९६ को वर्णाङ्क

१०७ । १०७ में घटा देने से राशि ११ । १७ मिले । इसी भाँति और भी जानना चाहिये ।

सोदाहरण भावित समाप्त हुआ ॥

दुर्गाप्रसादरचिते भाषाभाष्ये मिताक्षरे ।
वासनासंगतं पूर्णं भावितं चापि सांप्रतम् ॥

आसीन्महेश्वर इति प्रथितः पृथिव्या-
माचार्यवर्यपदवीं विदुषां प्रयातः ।
लब्ध्वावबोधकलिकां तत एव चक्रे
तज्जेन बीजगणितं लघु भास्करेण ॥९१॥

अथ प्रकृतग्रन्थस्य प्रचारार्थं गुरूत्कर्षप्रतिपादनात्मकं मङ्गलमाचरन्प्रबन्धसमाप्तिं दर्शयति—आसीदिति । विदुषां पण्डितानां मध्ये आचार्यवर्यपदवीं प्रयातः । अत एव पृथिव्यां प्रथितः । अनन्यसाधारणाचार्योपाधिभाक्तया जगत्प्रसिद्ध इत्यर्थः । 'महेश्वरः' इत्यासीत् । तज्जेन तदङ्गजन्मना भास्करेण ततो महेश्वराचार्यादेव अवबोधकलिकां ज्ञानकलिकां लब्ध्वा प्राप्य लघु पाठेन स्वल्पकायं बीजगणितं चक्रे । वसन्ततिलकावृत्तमेतत् ॥

ब्रह्माह्वयश्रीधरपद्मनाभ-
बीजानि यस्मादतिविस्तृतानि ।
आदाय तत्सारमकारि नूनं
सद्युक्तियुक्तं लघु शिष्यतुष्ट्यै ॥ ९२ ॥

ननु बीजगणितानि ब्रह्मगुप्तादिभिः प्रतिपादितानि तत्किमर्थमाचार्येण यतितमिति शङ्कायामुत्तरमाह—ब्रह्मेति । ब्रह्माद्यो ब्रह्मगुप्तः, श्रीधरः श्रीधराचार्यः, पद्मनाभः, एतेषां बीजानि यस्मात् अतिविस्तृतानि तस्मात् सारमादाय शिष्याणां तुष्टयै सद्युक्तियुक्तं सत्यः समीचीना या युक्तयः प्रश्नभङ्गरूपा वासनारूपा वा ताभिर्युक्तं लघु तद्बीजमकारि नूनम् । इन्द्रवज्रावृत्तमदः ॥

अत्रानुष्टुप्सहस्रं हि ससूत्रोद्देशके मितिः ।

ननु कथं लघ्वित्याशङ्कायामाह—अत्रेति । हि यतोऽत्र ससूत्रोद्देशके बीजे अनुष्टुभां सहस्रं मितिः परिमाणम् । पूर्वेषां बीजगणितेषु तु सहस्रद्वयादिमानमस्तीत्यतः संक्षिप्तमिदं न तु विस्तृतम् ॥

क्वचित्सूत्रार्थविषयं व्याप्तिं दर्शयितुं क्वचित् ॥ ३
क्वचिच्च कल्पनाभेदं क्वचिद्युक्तिमुदाहृतम् ।

नन्विदमपि विस्तृतमस्ति क्वचित्, क्वचिदेकस्मिन्नेव विषय उदाहरणबाहुल्योक्तेरित्याशङ्कायामुत्तरमाह—क्वचिदिति । क्वचित्सूत्रार्थविषयं दर्शयितुमुदाहृतम् यथा—'चतुस्त्रिगुणयो राश्योः—' इति । 'विगुणेन कयोराश्योः—' इति । 'त्रिपञ्चगुणराशिभ्यां—' इति । 'यौ राशी किल—' इति । न ह्येकस्मिन्नुदाहृते 'भावितं पक्षतः—' इति सूत्रस्यार्थः सर्वोऽपि विषयीभवति । तस्मादशेषं सूत्रार्थं दर्शयितुमुदाहरणचतुष्टयस्याप्यावश्यकता । क्वचिद् व्याप्तिं दर्शयितुमुदाहृतम् । यथा—'पञ्चकशतदत्तधनात्—' इत्युदाहृत्य 'एकैकशतदत्तधनात्—' इति तादृशमेव पुनरुदाहृतम् । इदं यदि नोदह्रियते तर्हि स्वकृते प्रकारविशेषे मन्दानां विश्वासो न भवेदित्येतदावश्यकम् । एवं कल्पनाभेदं दर्शयितुम् 'एको ब्रवीति—'

इत्युदाहरणमेकवर्णसमीकरण उदाहृतम् । एवं विविधयुक्तिप्रदर्शनार्थमपि बहुत्रोदाहृतमस्ति तस्मादसौ विस्तृतिर्न दोषावहा ॥

न ह्युदाहरणान्तोऽस्ति स्तोकमुक्तमिदं यतः ॥

ननु पूर्वबीजेषूदाहरणानि बहूनि सन्तीह तु स्वल्पान्यत्रोक्तानीति न सकलोदाहरणावगमः स्यादित्यत आह नेति । हि यत उदाहरणान्तो नास्ति अत इदं स्तोकं स्वल्पमुक्तम् ॥

दुस्तरः स्तोकबुद्धीनां शास्त्रविस्तरवारिधिः ।
अथ वा शास्त्रविस्तृत्या किं कार्यं सुधियामपि

नन्वत्र स्वल्पमुक्तं पूर्वबीजानि त्वतिविस्तृतान्यस्तान्येव मन्दप्रयोजनायालमिति शङ्कायामाह–दुस्तर इति । यो हि विस्तरः स मन्दप्रयोजकः सुधीप्रयोजको वा । नाद्यः । यतः शास्त्रविस्तरवारिधिः स्तोकबुद्धीनां दुस्तरो दुरवगाहः । नान्त्यः । सुधियामपि शास्त्रविस्तृत्या किं कार्यम् । यतस्ते कल्पनाकल्पकाः । ननु लघ्वपि बीजं मन्दप्रयोजकं सुधीप्रयोजकं वा । नाद्यः तैर्ज्ञातुमशक्तत्वात् । नान्त्यः । तेषां कल्पकत्वात् । इति चेन्न, स्वल्पग्रन्थस्य मन्दानामभ्याससाध्यत्वान्न तावदाद्यपक्षे दोषः । द्वितीयेऽपि न दूषणमित्याह–

उपदेशलवं शास्त्रं कुरुते धीमतो यतः ।
तत्तु प्राप्यैव विस्तारं स्वयमेवोपगच्छति ६६

उपदेशलवमिति । यतः शास्त्रं धीमत उपदेशलवं कुरुते तत्तु शास्त्रं सुधियं प्राप्यैव स्वयमेव विस्तारमुपगच्छति। न हि सुधियोऽपि किंचिदनधीत्य जानन्ति । अत इदं मदुक्तं सुधीमन्दसाधारणप्रयोजनायेति सर्वैरपि पठनीयम् ॥ अत्र दृष्टान्तमाह—

जले[1] तैलं खले गुह्यं पात्रे दानं मनागपि।
प्राज्ञे शास्त्रं स्वयं याति विस्तारं वस्तुशक्तितः[2]

जले इति। मनाक् ईषदपि तैलं जले वस्तुशक्तितः वस्तुशक्तिमहिम्ना स्वयं विस्तारं याति। बिन्दुमात्रमपि तैलं सलिले प्रक्षिप्तं सद्द्रुतमेवाबद्धचन्द्रककलापेन तत्सलिलमाच्छादयतीति तात्पर्यम्। एवमग्रेऽपि योजनीयम्। खलो दुष्टः। गुह्यं वाचानुद्घाटनीयं वृत्तम्। पात्रं योग्यतमः पुरुषः। दानं मूल्यग्रहणं विना स्वस्वत्वध्वंसपूर्वकपरस्वत्वजनकस्त्यागः। प्राज्ञः। शास्त्रं, यत्र तद्विदां संकेतः स ग्रन्थकलापः॥

गणक भणितिरम्यं बाललीलावगम्यं
सकलगणितसारं सोपपत्तिप्रकारम्।
इति बहुगुणयुक्तं सर्वदोषैर्विमुक्तं
पठ पठ मतिवृद्ध्यै लघ्विदं प्रौढिसिद्ध्यै॥ ८

इति श्रीभास्करीये सिद्धान्तशिरोमणौ
बीजगणिताध्यायः समाप्तः।

---

१ 'जले-' इत्यस्य प्राक् 'यथोक्तं यन्त्राध्याये' इति पाठः प्रायो मूलपुस्तक उपलभ्यते।

२—'वस्तुशक्तितः' इत्यस्याग्रे 'तथा गोले मयोक्तम्—उल्लसदमलमतीनां त्रैराशिकमात्रमेव पाटी बुद्धिरेव बीजम्। तथा गोलाध्याये मयोक्तम्—अस्ति त्रैराशिकं पाटी बीजं च विमला मतिः। किमज्ञातं सुबुद्धीनामतो मन्दार्थमुच्यते।' इत्यपि पाठः प्रायो मूलपुस्तके दृश्यते परं टीकाकारैर्न स्वीकृतः।

एवं स्वकृतस्य बीजगणितस्य गुणान्युक्त्वा संस्थाप्योपसंहरति—गणकेति । हे गणक, मतिवृद्ध्यै, प्रौढिसिद्ध्यै च, भणितिरम्यं भणितयः शब्दास्तै रम्यं रमणीयम् । बाललीलया सुखेनेति तात्पर्यम्, अवगम्यम् । सकलगणितानां सारं, वासनामूलकतयेति भावः । सोपपत्तयः प्रकारा यस्मिन् तादृशम् । इति प्रदर्शितैर्बहुभिर्गुणैर्युक्तं समेतम् । सर्वदोषैः प्रमेयांशादिदूषकदोषसमूहैर्विशेषेण मुक्तं वर्जितम् । लघु, ग्रन्थसंख्यया क्षुद्रकायमिदं बीजगणितं पठ पठ । आदरातिशयोक्तिरियम् । इह वृद्धिसिद्धिशब्दौ कुल्याप्रवृत्तिन्यायेन मङ्गलार्थमपि प्रकाशयतः, प्रायेण माङ्गलिका आचार्या महतः शास्त्रौघस्य मङ्गलार्थं वृद्धिसिद्ध्यादिशब्दानादितः[१] प्रयुञ्जते । अत एव भगवता महाभाष्यकारेण 'वृद्धिरादैच्' इति सूत्रव्याख्यानावसरे 'मङ्गलादीनि हि शास्त्राणि प्रथन्ते वीरपुरुषकाणि भवन्त्यायुष्मत्पुरुषकाणि चाध्येतारश्च वृद्धियुक्ता यथा स्युरिति' सिद्धान्तितमिति शिवम् ॥

विलासी व्याख्योपसंहारः—

अखण्डसौभाग्यविभूतिसूति-
विश्वंभरालंकरणैकहेतुः ।
अभीहिताकल्पनकल्पवल्ली
जयत्ययोध्या कमलालया च ॥ १ ॥

तस्याः पृष्ठचरीव पश्चिमदिशि क्रोशाष्टकाभ्यन्तरे
पाण्डित्यास्पदमस्ति पण्डितपुरी पिल्खावपर्यन्तभूः ।

---

१ आदिरित्युपलक्षणं तेन मध्यान्तयोरपि ज्ञेयम् ।

यत्राभ्यर्थनतोऽपि भूरिदतया गीतावदानोत्करः
प्रालेयद्युतिशेखरो विजयते श्रीजङ्गलीवल्लभः ॥ २ ॥

तत्र श्रीशिवपादपद्मभजनप्राप्तप्रसादोदय-
श्चम्पूकृन्नृपरामचन्द्रचरिते दुर्गाप्रसादः सुधीः ।
मुग्धानामपि बोधसाधनविधिं बीजोपरि व्याकृतिं
प्राणैषीत्तिपपठीर्हिताय गुणभूभोगीन्दु (१८१३) संख्ये शके॥ ३॥

॥ शं बोभवीतु ॥

श्रीः

परिशिष्ट (१)

बीजपरिचय।

सांप्रत में पाश्चात्य पद्धति से बीजगणित का पठन-पाठन प्रचलित है। इस पद्धति का परिचय संस्कृतज्ञ छात्रों के लिए आवश्यक है। इसलिए संक्षेप में उसकी परिभाषा आदि का निरूपण किया जाता है।

१. जिस प्रकार अङ्कगणित में संख्याओं के स्थान में १, २, ३, ४, ५ आदि अङ्क लिखते हैं, उसी प्रकार बीजगणित में संख्याओं के स्थान में अक्षर लिखते हैं। व्यक्त अर्थात् ज्ञात राशियों के लिए अ, क, ग आदि और अव्यक्त अर्थात् अज्ञात राशियों के लिए य, र, ल, व आदि लिखते हैं। और व्यक्ताव्यक्त संख्या के बोधक त, थ, द आदि लिखते हैं।

श्लोक।

'व्यक्तस्य द्योतका आद्या, याद्या अव्यक्तबोधकाः।
भवन्ति तादिका वर्णा व्यक्ताव्यक्तत्वदर्शकाः॥'

२. + यह धन चिह्न है। जैसा—अ + क अर्थात् अ में क जुड़ा है।

— यह ऋण चिह्न है। अ—क अर्थात् अ में क घटा है।

( ), { }, [ ], ———, इन में पहले तीन कोष्ठ और चौथा शृङ्खल कहा जाता है।

(अ+क) + (ग+घ), {अ+क} — {ग+घ}, [अ+क]

$\pm$ $\overline{[ग+घ]}$ $\overline{अ+क}$ $\pm$ ग+घ ये चारों क्रम से यह प्रकाशित करते हैं कि अ+क में ग+घ; धन, ऋण, धनर्ण, और ऋणधन किया गया है। इसी प्रकार इन सब कोष्ठकों का उपयोग गुणन-भजन आदि में लिया जाता है।

×, ·, ये दोनों गुणन के चिह्न हैं। जैसा, अ×क, अ·क अर्थात् अ, क से अथवा क, अ से गुणित है; इसी कारण, अ, क आपस में गुण्य-गुणकरूप अवयव कहलाते हैं। और यदि बीजात्मक अवयव हों, तो गुणन चिह्न नहीं भी किया जाता। जैसा, य र ल।

÷, यह भाग का चिह्न है। जैसा अ ÷ क अर्थात् अ, क से भाजित है। अथवा भिन्न की रीति से $\frac{अ}{क}$ ऐसा लिखते हैं

अ^{२}, अ^{३}, अ^{४}, इत्यादि क्रम से अ के वर्ग, घन और चतुर्घात आदि के बोधक हैं। वर्ग के समद्विघात होने से उसका घातमापक २, इसी प्रकार घन का घातमापक ३, चतुर्घात का ४ होता है। इससे यह स्पष्ट है कि वर्गादि घातक्रिया के प्रकाशक घातमापक होते हैं। ऐसे ही अ^{न}, अ^{म}, ये अ के न, म घात के बोधक हैं।

$\sqrt{अ}$, $\sqrt[३]{अ}$, $\sqrt[४]{अ}$ इत्यादि अ के वर्गमूल, घनमूल और चतुर्घात मूल के बोधक हैं। इस से यह ज्ञात होता है कि वर्गादि घातों के घातमापक, वर्गादि मूल के मूलमापक होते हैं। इसी प्रकार, $\sqrt[न]{अ}$, $\sqrt[म]{अ}$, ये अ के न-घातमूल और म-घातमूल के बोधक हैं।

अथवा, अ$^{\frac{१}{२}}$, अ$^{\frac{१}{३}}$, अ$^{\frac{१}{४}}$, अ$^{\frac{१}{न}}$, अ$^{\frac{१}{म}}$, इस रीति से भी अ के वर्गमूल आदि प्रकट किये जाते हैं।

३· :, =, :, यह और :, : :, : यह चिह्न अनुपात के हैं। जैसा, अ : क = ग : घ, अथवा अ : क : : ग : घ, अर्थात् अ का, क में, तथा ग का, घ में, भाग देने से समान ही फल आता है $\frac{क}{अ} = \frac{घ}{ग}$। इस सम्बन्ध और अनुपात का पूरा विचार क्षेत्रमिति के पाँचवें अध्याय में किया गया है।

=, यह चिह्न समत्व का दर्शक है। जैसा अ = क।

<, यह चिह्न अथवा > यह चिह्न विषमत्व का प्रकाशक है जैसा अ > क यह सूचित करता है कि अ, क से बड़ा है। और क < अ अर्थात् अ, से क छोटा है।

ऽ, यह चिह्न अन्तर को प्रकाशित करता है। जैसा अ ऽ क अर्थात् अ और क के बीच जो छोटा हो, उसको बड़े में से घटा देना चाहिए।

∵, यह चिह्न 'जिस लिए' का वाचक है।

∴, यह 'इसलिए' का वाचक है।

........, यह इत्यादि का बोधक है।

४. अ, २ क, ६ गय^{४}, इत्यादि एक संख्या के बोधक होने से केवल पद, और अ+क, अ+क−ग इत्यादि केवल पद से संयुक्त होने से द्वियुक्, त्रियुक् आदि पद, और १, २, ३, आदि व्यक्त पद कहे जाते हैं। यदि बीजात्मक पद दो आदि संख्या से गुणित हों तो उनके गुण्य-गुणकरूप खण्ड मान कर, गुणक को गुण्य का 'वारद्योतक' कहते हैं। जैसा २ क में २, क का वारद्योतक है। इसी प्रकार व्यक्त पद में भी जानना चाहिए।

* * *

प्रसिद्धार्थ—

५. (क) जो राशियाँ किसी दूसरी राशियों के तुल्य हों वे सब आपस में भी तुल्य हैं।

(ख) तुल्य दो राशियों में तुल्य ही जोड़ देने से, या, तुल्य ही घटा देने से, या, उन को तुल्य ही से गुणा देने से, या, उन में तुल्य ही का भाग देने से भी वे तुल्य ही रहती हैं।

(ग) इसी प्रकार विषम (अतुल्य) दो राशि, तुल्य ही जोड़ने आदि से वे विषम ही रहती हैं।

(घ) किसी दो राशि में एक में जितना घटाया जाय, उतना

ही दूसरे में जोड़ दिया जाय, तो भी उनके योग आदि तुल्य ही रहेंगे।

(च) जो राशियाँ प्रत्येक दूनी आदि किसी दूसरी राशियों के समान हैं, वे सब आपस में भी समान ही हैं।

(छ) जो राशियाँ प्रत्येक किसी दूसरी राशि के आधे आदि भागों के समान हैं, वे सब आपस में भी समान हैं।

(ज) किसी राशि में, जितना जोड़ा जाय, उतना ही उसमें से घटा दिया जाय अथवा, जितने से वह गुणी जाय, उतने ही से फिर भाजित की जाय, तो भी वह राशि यथावत् ही रहती है।

(झ) कोई राशि अपने खण्ड से बड़ी होती है और अपने सब खण्डों के योग के समान होती है।

संकलन।

६· यदि संकलनीय पद सजातीय हों अर्थात् उनके वर्ण, दो आदि घात और धनर्ण चिह्न, एक जाति के हों तो पहले उनके वारद्योतकों का योग लिखकर, उसके साथ ही पदों के वर्ण लिखना और आदि में यथागत धन किंवा ऋण चिह्न लिखना। यदि व्यक्त पद हों, तो उनको भी जोड़कर लिख देना। यदि संकलनीय पद विजातीय हों, तो एक-एक जातिवालों को जोड़कर लिखना और यथासंभव धन और ऋण के अन्तर को योग जानना।

श्लोक।

'समानजाति भजतां पदानां,
योगो वियोगोऽपि विदा विधेयः
वर्णेन घातेन धनर्णकाभ्यां
साजात्यवैजात्यभिदावधेया ॥'

(१) य+१
७ य
१० य+ १७
---
१८ य + १८

(२) २ यर^{२}– ५ अ^{३}
५ यर^{२}– अ^{३}
३ यर^{२}–४ अ^{३}
---
१० यर^{२}–१० अ^{३}

(३) ४ य^{२}–३ अक^{३}+७
य^{२}+७ अक^{३}–१
५ य^{२}– अक^{३}+१०
---
१० य^{२}+३ अक^{३}+१६

(४) अ^{२}–क^{२}
६ अ^{३}–क^{२}
–२ अ^{४}+३ क^{३}

अ^{२}–क^{२}+^{६}अ^{३}–क^{२}–२ अ^{४}+३ क^{३}

(५) ५ य^{२}र+ल+३
य^{२}र+ल–७
–अ^{२}क–व^{२}+२
---
६ य^{२}र+२ ल–४=अ^{२}क–व^{२}+२

(१) उदाहरण में य + १ इस संयुक्तपद में, य वर्ण का १ वारद्योतक है, उसके लिखने का संप्रदाय नहीं है। क्योंकि १ से गुण्य को गुणने से वह अविकृत ही रहता है। एक य, सात य, दश य, अथवा–१, ७, १० गुणित य ; अथवा, १ + ७ + १० = १८ गुणित य ; अर्थात् य पदद्योत्य पदार्थ १८ बार होगा, इसलिए रेखा के नीचे योग में, य पद का १८ बार द्योतक हुआ। + १८ यह + १ + १७ इन व्यक्त पदों का योग है। व्यक्त पद को पूर्वाचार्य रूप कहते हैं। यहाँ लाघवार्थ धन पद के आदि में प्राय: धन का चिह्न नहीं लिखते।

यहाँ (१) उदाहरण में वर्ण, चिह्न एक जाति के (२) में वर्ण, चिह्न, घात एक जाति के (३) में चिह्न मात्र भिन्न जाति के, (४) में चिह्न और घात भिन्न जाति के और (५) में सब भिन्न जाति के हैं।

व्यवकलन।

७· वियोज्य पद के नीचे वियोजक पद लिखना। यदि वियो-

जक पद में, केवल पद धन हो तो उसको ऋण और ऋण हो तो धन मानकर, धन-धन का ऋण-ऋण का योग और धन, ऋण का अन्तर करना वही योग होगा। यदि वियोज्य-वियोजक विजातीय हों, तो उनको अलग रखना चाहिए।

आचार्यसूत्र।

'योगे युतिः स्यात् क्षययोः स्वयोर्वा,
धनर्णयोरन्तरमेव योगः।
संशोध्यमानं स्वमृणत्वमेति
स्वत्वं क्षयस्तद्युतिरुक्तवच्च॥'

(१)
$$\begin{array}{r} १९\,\text{य} \\ १३\,\text{य} \\ \hline ६\,\text{य} \end{array}$$

(२)
$$\begin{array}{r} -१०\,\text{अक} \\ -\;९\,\text{अक} \\ \hline -\,\text{अक} \end{array}$$

(३)
$$\begin{array}{r} -\sqrt{७\text{त}}+\sqrt{५\text{थ}} \\ +\sqrt{१२\text{त}}-\sqrt{१०\text{थ}} \\ \hline -\sqrt{१९\text{त}}+\sqrt{१५\text{थ}} \end{array}$$

(४)
$$\begin{array}{r} \text{अय}^{\frac{१}{२}}-७\,\text{लव}^{\frac{१}{३}} \\ ४\,\text{अय}^{\frac{१}{२}}+९\,\text{लव}^{\frac{१}{३}} \\ \hline -\text{अय}^{\frac{१}{२}}-१६\,\text{लव}^{\frac{१}{३}} \end{array}$$

(५)
$$\begin{array}{r} (\text{अ}+\text{क})^{३}+१०(\text{अ}-\text{क})\text{ग}^{२}-\text{घ} \\ =(\text{अ}+\text{क})^{३}-\;३(\text{अ}-\text{क})\text{ग}^{२}-\text{घ} \\ \hline -२(\text{अक})^{३}+१३(\text{अ}-\text{क})\text{ग}^{२} \end{array}$$

कोष्ठक-निरास।

धन कोष्ठक का निरास (भङ्ग) करने के लिए, उसके भीतर के सब पद यथास्थित रहेंगे। यदि ऋण कोष्ठक हो तो जितने केवल पद होंगे, उन सबके धनर्ण चिह्न पलट जायँगे। इस प्रकार जितने कोष्ठक होवें, उतनी बार क्रिया करने से, सब कोष्ठकों का निरास होगा।

श्लोक ।

'विधीयते चेद् धनकोष्ठभङ्ग-
स्तदा पदं पूर्ववदेव तिष्ठेत् ।
यदृणकोष्ठापगमस्तदानीं
पदे धनर्णत्वविपर्ययः स्यात् ॥'

'धनकोष्ठे गतं किंचित् पदं तिष्ठेद् यथास्थितम् ।
ऋणकोष्ठे नीयमानं विपर्यासं प्रपद्यते ॥
कोष्ठे धनर्णवैलोम्ये तस्याभ्यन्तरवर्तिनः ।
प्रत्येकस्य पदस्यापि तथात्वे सति नान्तरम् ॥'

(१) (अ + क) + (अ − क) = अ + क + अ − क
= २ अ ।

(२) (अ + क) − (अ − क) = अ + क − अ + क
= २ क ।

(३) − (अ + क) − (अ − क) = − अ − क − अ
+ क = − २ अ ।

(४) ४ यर − {(य^{2} + २ यर + र^{2}) − (य^{2} − २यर
+ र^{2})} = ४ यर − (य^{2} + २ यर + र^{2})
+ (य^{2} − २ यर + र^{2}) = ४ यर − य^{2} − २ यर
− र^{2} + य^{2} − २ यर + र^{2} = ० ।

(५) त^{2} + तथ − [त^{2} + {तथ − (त^{2} − थ^{2})}]
= त^{2} − थ^{2} ।

अव्यक्त वाग्द्योतकों का योग और अन्तर ।

८. यदि वाग्द्योतक के केवल पद वा संयुक्त पद एक जाति के हों, तो उनका योग चिह्न के साथ कोष्ठक में लिखकर, आगे सजातीय पद लिखना और कोष्ठक के आदि में यथागत धनर्ण चिह्न करना । यदि

संयुक्त पद एक जाति के न हों तो 'कोष्ठे धनर्णवैलोम्ये—' के अनुसार धन चिह्न किंवा, ऋण चिह्न करके सजातीय बनाकर योग करना, वही इष्ट योग होगा। वियोज्य-वियोजक पदों में वियोजक के धनर्ण चिह्न को पलटकर योग करना, तब वही अन्तर होगा।

श्लोक।

'कोष्ठे निवेश्य वारद्योतकपदयोगमालिखेदग्रे।
सामान्यगुणयमादौ, चिह्नविधाने भवेद् योगः॥
संयुक्तपदनिपाते धनमथवर्णं विधाय साजात्यम्।
विश्लेषस्तु वियोजकपदवैलोम्ये सति श्लेषः॥'

(१) अय — तर
कय — ८ थर
२ गय — दर

(अ + क + २ग) य — (त + ८थ + द) र

(२) (प — ३ फ) य — (व — भ) र
(३ प + फ) य — (४ ब — भ) र
(५ प — ७ फ) य — (३ ब + भ) र

(९ प — ९ फ) य — (८ ब — भ) र

(३) — अय — ४ तल
५ खय — २ थल
— २ गय + दल

+ (— अ + ५ ख — २ ग) य — (४ त + २ थ — द) ल

(४) — (२ अ — क) र + (४ त — २ थ) ल
(५ अ + क) र — (४ त + थ) ल
(अ + क) र — (३ त — ५ थ) ल

(४ अ + क) र — (३ त + २ थ) ल

(५) (२य + ३र) य^2 + (५र − ७ल) यर − (५ल−य) र^2
(य − ५) य^2 − (४र + ३ल) यर + (३ल + य) र^2
(३य − र) य^2 − (र − ११ल) यर − (ल−२य) र^2
(५य + र) य^2 − (२र + ५ल) यर + (२ल−३य) र^2

(११य−२र) य^2 + (−२र − ४ल) यर + (−ल+य) र^2
वा, (११य−२र) य^2 − (२र + ४ल) यर − (ल + य) र^2

(१) वियोज्य = अय − तर
वियोजक = कय − ८थर

अन्तर = (अ − क) य − (८थ + त) र

(२) − (अ − क) र + (४त − २थ) ल^3
(५अ + क) र − (४त + थ) ल^3

− ७अर − (८त + ३थ) ल^3

गुणन ।

६. गुण्य के प्रत्येक केवल पद को, गुणक के प्रत्येक केवल पद से गुणाकर, उनका योग करना, वही गुणनफल होगा। यहां गुण्य-गुणक के केवल पद धन, धन हों, अथवा ऋण, ऋण हों तो उनका गुणन फल धन होगा। यदि एक धन और दूसरा ऋण हो तो गुणनफल ऋण होगा। सजातीय-बीजात्मक वारद्योतकों का घात, उनका वर्गादिघात तथा संख्याओं का घात संख्यात्मक होगा। यदि गुण्य-गुणक में सजातीय वर्ण हों, तो उनकी घातमापक संख्याओं के योग तुल्य गुणनफल में घातमापक की संख्या होगी।

श्लोक।

'गुण्यस्य केवलपदं गुणयेद् गुणकस्य केवलेन पदा
संकलिते फलजाते गुणनफलं कीर्तयन्त्यार्याः॥
त्रिह्वे मयानजातिनि गुणनफलं स्याद् धनं विजातीये।
ऋणमथ वारद्योतकघाताद्येवं विजानीयात्॥

वर्णो वर्णाङ्कवधे वर्गादि भवेत् समानजातीये ।
समवर्णघातमापकसंख्यायोगो मतो गुणने ॥'

(१) गुण्य = ३ य
गुणक = ७ रल
गुणनफल = २१ यरल

(२) -५ अ^{२}क
$-$ अच
५ अ^{३}कच

(३) अय + १
$-$ ७ प^{२}
$-$ ७ अयप^{२}
$-$ ७ प^{२}
$-$ अयप^{२} $-$ ७ प^{२}
$= -$ (अय + १) ७ प^{२}

(४) अ^{३} + अ^{२}क + अक^{२}
अ^{२} $-$ अक
अ^{५} + अ^{४}क + अ^{३}क^{२}
$-$ अ^{४}क $-$ अ^{३}क^{२} $-$ अ^{२}क^{३}
अ^{५} $-$ अ^{२}क^{३}

(५) य^{४} + य^{२} + १
य^{४} $-$ य^{२}
य^{८} + य^{६} + य^{४}
$-$ य^{६} $-$ य^{४} $-$ य^{२}
य^{८} $-$ य^{२}

(६) य^{६} + य^{४} + १
$-$ य^{४} + १
$-$ य^{१२} $-$ य^{८} $-$ य^{४}
+ य^{८} + य^{४} + १
$-$ य^{१२} + १

(७) य^{२} + यर^{२} + ३ र^{३}ल
  ३ य^{३} − य^{२}र + ५ र^{४}ल

३ य^{५} + ३ य^{४} र^{२} + ६ य^{३} र^{३}ल
  − य^{४}र − य^{३}र^{३} − ३ य^{२} र^{४} ल
    + ५ य^{२}र^{४}ल + ५ यर^{६}ल + १५ र^{७}ल^{२}

३ य^{५} + ३ य^{४}र^{२} − य^{४}र − य^{३}र + ६ य^{३}र^{३}ल + २ य^{२}र^{४}ल
+ ५ यर^{६}ल + १५ र^{७}ल^{२}
वा, ३ य^{५} + य^{३}र (३ यर − य − र^{२}) + य^{३}ल (६ य^{२} + २ य^{३}र
+ ५ र^{३}) + १५ र^{७}ल^{२}.
वा, ३ य^{५} + य^{४}र (३ र − १) − य^{३}र^{३} + र^{३}ल (६ य^{३}
+ २ य^{४}र + ५ यर^{३} + १५ र^{४}ल)

(८) य^{४} + तय^{३} + (त − १) य^{२} + (त − २) य + त − ३
  य − त

य^{५} + तय^{४} + (त − १) य^{३} + (त − २) य^{२} + तय − ३ य
− तय^{४} − त^{२}य^{३} − (त − १) तय^{२} − (त − २) तय − त^{२} + ३ त

य^{५} − (त^{२} − त + १) य^{३} − (त^{२} − २त + २) य^{२} − (त^{२} − ३त + ३)
य − त^{२} + ३ त.

यहाँ पर, य^{५} = य^{५}
+ तय^{४} − तय^{४} = ०
+ (त − १) य^{३} − त^{२}य^{३} = − (त^{२} − त + १)य^{३}
− (त − १) तय^{२} + (त − २)य^{२} = − (त^{२} − २त + २)य^{२} गुणनफल.
− (त − २) तय + तय − ३य = − (त^{२} − ३त + ३) य.
− त^{२} + ३ त = − त^{२} + ३ त.

(९) अ + (अ + $\frac{१}{२}$) य + (अ + १) य^{२} + (अ + $\frac{३}{२}$) य^{३} + (अ + २) य^{४} + (अ + $\frac{५}{२}$) य^{५} इसको १ − २ य + य^{२} इससे गुणा देने से गुणनफल में तीन पंक्ति हुई—

$$\text{अ} + (\text{अ} + \tfrac{\text{१}}{\text{२}})\,\text{य} + (\text{अ} + \text{१})\,\text{य}^{\text{२}}\ (\text{अ} + \tfrac{\text{३}}{\text{२}})\,\text{य}^{\text{३}} + (\text{अ} + \text{२})\,\text{य}^{\text{४}} + (\text{अ} + \tfrac{\text{५}}{\text{२}})\,\text{य}^{\text{५}}$$

$$- \text{२ अय} - (\text{अ} + \tfrac{\text{१}}{\text{२}})\,\text{३ य}^{\text{२}} - (\text{अ} + \text{१})\,\text{२ य}^{\text{३}} - (\text{अ} + \tfrac{\text{३}}{\text{२}})\,\text{२ य}^{\text{४}} - (\text{अ} + \text{२})\,\text{२ य}^{\text{५}} - (\text{अ} + \tfrac{\text{५}}{\text{२}})\,\text{२ य}^{\text{६}}$$

$$+ \text{अय}^{\text{२}} + (\text{अ} + \tfrac{\text{१}}{\text{२}})\,\text{य}^{\text{३}} + (\text{अ} + \text{१})\,\text{य}^{\text{४}} + (\text{अ}+\tfrac{\text{३}}{\text{२}})\,\text{य}^{\text{५}} + (\text{अ} + \text{२})\,\text{य}^{\text{६}} + (\text{अ} + \tfrac{\text{५}}{\text{२}})\,\text{य}^{\text{७}}$$

यहाँ पर,

$$\begin{aligned}
\text{अ} &= \text{अ} \\
(\text{अ}+\tfrac{\text{१}}{\text{२}})\,\text{य} - \text{२ अय} &= -(\text{अ}+\tfrac{\text{१}}{\text{२}})\,\text{य}. \\
(\text{अ}+\text{१})\,\text{य}^{\text{२}} - (\text{अ}+\tfrac{\text{१}}{\text{२}})\,\text{२ य}^{\text{२}} + \text{अय}^{\text{२}} &= \text{०} \\
(\text{अ}+\tfrac{\text{३}}{\text{२}})\,\text{य}^{\text{३}} - (\text{अ}+\text{१})\,\text{२ य}^{\text{३}} + (\text{अ}+\tfrac{\text{१}}{\text{२}})\,\text{य}^{\text{३}} &= \text{०} \\
(\text{अ}+\text{२})\,\text{य}^{\text{४}} - (\text{अ}+{}^{\text{३}})\,\text{२ य}^{\text{४}} + (\text{अ}+\text{१})\,\text{य}^{\text{४}} &= \text{०} \\
(\text{अ}+\tfrac{\text{५}}{\text{२}})\,\text{य}^{\text{५}} - (\text{अ}+\text{२})^{\text{२}}\,\text{य}^{\text{५}} + (\text{अ}+\tfrac{\text{३}}{\text{२}})\,\text{य}^{\text{५}} &= \text{०} \\
-(\text{अ}+\tfrac{\text{५}}{\text{२}})\,\text{२ य}^{\text{६}} + (\text{अ}+\text{२})\,\text{य}^{\text{६}} &= -(\text{अ}+\text{३})\,\text{य}^{\text{६}} \\
(\text{अ} + \tfrac{\text{५}}{\text{२}})\,\text{य}^{\text{७}} &= (\text{अ}+\tfrac{\text{५}}{\text{२}})\,\text{य}^{\text{७}}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{अ} - (\text{अ}+\tfrac{\text{१}}{\text{२}})\,\text{य} - (\text{अ}+\text{३})\,\text{य}^{\text{६}} + (\text{अ}+\tfrac{\text{५}}{\text{२}})\,\text{य}^{\text{७}}$$

भागहार ।

१०. किसी एक वर्ण के घातमापक क्रम से घटते अथवा बढ़ते हुए रहें, इस क्रम से भाज्य तथा भाजक को व्यक्तगणित के अनुसार लिखना । फिर भाज्य के पहले केवल पद में, भाजक का पहला केवल पद, जिससे गुणित घट सके, उससे भाजक के प्रत्येक पद को गुणाकर, भाज्य में घटा देना । वह गुणक भजनफल का पहला पद होगा । जो शेष बचे, उसको फिर भाज्य मानकर, उक्त क्रिया करनी । इस प्रकार जब भाज्य निःशेष हो जाय तब पूरा भजनफल होगा । यदि भाजक से कम भाज्य शेष रहे, तो उसके नीचे भिन्न रीति के अनुसार भाजक लिखकर, उसको प्राप्त हुए

भजनफल के आगे रखना । गुणन की भाँति यहाँ भाज्य-भाजक के चिह्न सजातीय हों तो, भजनफल धन और विजातीय हों तो ऋण होगा । यदि भाज्य-भाजक केवल पद हों अथवा, भाजक मात्र केवल पद हो तो उनमें वारद्योतकाङ्क, घातमापक और वर्णों में, यथासंभव अपवर्तन देने से ही भजनफल सिद्ध होगा ।

श्लोक ।

'क्रमादेकस्य वर्णस्य यथा स्याद् घातमापकः ।
हीयमानस्तथा न्यस्ताद् भाज्यादन्त्यात्तु भाजकः ॥
येन निघ्नो विशुद्धेत् तत् फलमेवं पुनः क्रिया ।
शेषे तु त्वदधो हारो धनर्णं गुणनोक्तिवत् ॥
भाज्य-भाजकयोरेकपदत्वे भाजकस्य वा ।
यथावदपवर्तेन भागहारे फलं भवेत् ॥'

(१) भाजक । भाज्य । भजनफल

$\text{५ अकग}^{\text{२}}\ )\ \text{१५ अ}^{\text{२}}\text{कग}^{\text{४}}\ (\ \text{३ अग}$

अर्थात् $\dfrac{\text{१५ अ}^{\text{२}}\text{कग}^{\text{४}}}{\text{५ अकग}^{\text{२}}} = \text{३ अग}$

यहाँ वारद्योतकाङ्कों में ५ का, $\text{अ}^{\text{२}}$ में अ के एक घात अ का, $\text{ग}^{\text{४}}$ में ग के द्विघात $\text{ग}^{\text{२}}$ का और क वर्णों में क का, अपवर्तन देने से शेष भजनफल ३ अग हुआ ।

$$(\text{२})\ \frac{-\text{अय} + \text{अय}^{\text{२}} - \text{कय}^{\text{३}}}{-\text{अय}} = \text{१} - \text{य} + \frac{\text{कय}^{\text{२}}}{\text{अ}}$$

यहाँ भाज्य के प्रत्येक पद में भाजक का अपवर्तन लगाने से भजनफल उत्पन्न हुआ ।

(३) $२-य$) $६४-य^{६}$ ($३२+१६य+८य^{२}+४य^{३}+२य^{४}+य^{५}$

$६४-३२य$

$३२य$

$३२य-१६य^{२}$

$१६य^{२}$

$१६य^{२}-८य^{३}$

$८य^{३}$

$८य^{३}-४य^{४}$

$४य^{४}$

$४य^{४}-२य^{५}$

$२य^{५}-य^{६}$

$२य^{५}-य^{६}$

....

(४) $३य^{२}+५य-७$) $६य^{४}-२य-३१य^{२}+३३य-७$ ($२य^{२}-४य+१$

$६य^{४}+१०य^{३}-१४य^{२}$

$-१२य^{३}-१७य^{२}+३३य$

$-१२य^{३}-२०य^{२}+२८य$

$३य^{२}+५य-७$

$३य^{२}+५य-७$

. . .

(५) $अ-क+ग$) ($अ^{२}+२अक+क^{२}-ग^{२}$

$अ^{३}+अ^{२}क-अक^{२}-क^{३}+अ^{२}ग+२अकग+क^{२}ग-अग^{२}+कग^{२}-ग^{३}$

$अ^{३}-अ^{२}क \quad +अ^{२}ग$

$२अ^{२}क-अक^{२} \quad +२अकग$

$२अ^{२}क-२अक^{२} \quad +२अकग$

$अक^{२}-क^{३} \quad +क^{२}ग$

$अक^{२}-क^{३} \quad +क^{२}ग$

$-अग^{२}+कग^{२}-ग^{३}$

$-अग^{२}+कग^{२}-ग^{३}$

. . .

अथवा, अ—क+ग) अ^{३}+ (क+ग)अ^{२}—(क^{२}—२कग+ग^{२}) अ+ (क+ग)कग—क^{३}—ग^{३} (अ^{२}+२अक+क^{२}—ग^{२}

अ^{३}—अ^{२}क+अ^{२}ग

२ अ^{२}क—(क^{२}—२कग+ग^{२}) अ

२ अ^{२}क—२अक^{२}+२ अ क ग

अक^{२}—अग^{२}+(क+ग) कग — क^{३}

अ क^{२} — क^{३} + क^{२}ग

— अग^{२}+कग^{२}—ग^{३}

— अग^{२}+कग^{२}—ग^{३}

. . .

(६) १+१—त=१+त+त^{२}+त^{३}+त^{४}+त^{५} इत्यादि ।

यहां भजनफल का अन्त न होगा चाहो जबतक भाग किया जाय । इसलिए ऐसे भजनफल को अनन्त श्रेढी कहते हैं ।

(७) $\frac{१+त}{१+त}$ =१+२त+त^{२}+त^{३}+त^{४}+त^{५}+........................ ।

घातक्रिया ।

११. उद्दिष्ट पद का जितना घात करना हो, उतने स्थानों में उसको रखकर गुणन करने से वह घात होगा । और पद धन हो तो उसका घात धन होगा । यदि ऋण हो तो उसका घात धन अथवा, ऋण होगा ।

श्लोक ।

'समद्वित्र्यादिको घातः क्रमाद्वर्गघनादिकः ।
घातमापकसाम्ये स्याद् धनमेषोऽन्यथात्वृणम् ॥'

(१) $\pm\, १ - \text{य}$ इसके वर्गादिघात करना है—

$$१ - \text{य}$$
$$१ - \text{य}$$
$$- \text{य}$$
$$- \text{य} + \text{य}^{२}$$
$$\text{वर्ग} = १ - २\text{य} + \text{य}^{२}$$
$$१ - \text{य}$$
$$१ - २\text{य} + \text{य}^{२}$$
$$- \text{य} + २\text{य}^{२} - \text{य}^{३}$$
$$\text{घन} = १ - ३\text{य} + ३\text{य}^{२} - \text{य}^{३}$$
$$\text{वा}, - १ + ३\text{य} - ३\text{य}^{२} + \text{य}^{३} ।$$
$$१ - \text{य}$$
$$१ - ३\text{य} + ३\text{य}^{२} - \text{य}^{३}$$
$$- \text{य} + ३\text{य}^{२} - ३\text{य}^{३} + \text{य}^{४}$$
$$\text{चतुर्घात} = १ - ४\text{य} + ६\text{य}^{२} - ४\text{य}^{३} + \text{य}^{४} \text{ इत्यादि ।}$$

विशेष—

यदि $\text{क}^{४}$ को $\text{क}^{३}$ से गुणाना है । यहां $\text{क}^{४}$ का यह अर्थ है कि चार क आपस में गुणे गये हैं ।

अर्थात् $\text{क} \times \text{क} \times \text{क} \times \text{क}$ और $\text{क}^{३}$ अर्थात् तीन क आपस में गुणे हैं, $\text{क} \times \text{क} \times \text{क}$ ।

$\therefore \text{क}^{४} \times \text{क}^{३} = \text{क} \times \text{क} \times \text{क} \times \text{क} \times \text{क} \times \text{क} \times \text{क} = \text{क}^{७}$

इससे यह जानना चाहिए कि घातफल का घातमापक घात के अवयवों के घातमापक के योग के तुल्य होता है और $\text{क}^{५}$ में $\text{क}^{२}$ का भाग देना है तो $\frac{\text{क}^{५}}{\text{क}^{२}} = \frac{\text{क} \times \text{क} \times \text{क} \times \text{क} \times \text{क}}{\text{क} \times \text{क}} =$ $\text{क} \times \text{क} \times \text{क} = \text{क}^{३}$ इससे ज्ञात हो[illegible] कि लब्धि का घात-

मापक भाज्य और भाजक के घातमापकों के अन्तर के तुल्य होता है। जैसा, $\frac{क^{न}}{क^{म}} = क^{न-म}$ ....(१)

इसमें म = न मानें तो $\frac{क^{न}}{क^{न}} = क^{न-न}$

$\therefore क^{0} = १$, अर्थात् प्रत्येक राशि जिसका घातमापक शून्य है, एक १ के तुल्य होती है।

इसी प्रकार, घातक्रिया में राशि का वर्ग घातमापकों के गुणन से और मूल भाग देने से ही सिद्ध हो जाता है। इस प्रकार के गणितों के लिए, 'प्रधानमापक-सारणी' 'Chambers' Mathematical Tables' से पूर्ण परिचित होना चाहिए।

घात-श्लोक।

'यो घातः खलु यस्याः संख्यायाः कर्तुमिष्टः स्यात्।
तद् घातमापकसमे स्थाने विन्यस्य तान् गुणयेत्॥'

जैसा, २ का द्विघात, त्रिघात, चतुर्घात करना है, तो यहाँ क्रम से घातमापक २, ३, ४ हैं।

$\therefore$ २ × २ = ४ वर्ग.
२ × २ × २ = ८ घन.
२ × २ × २ × २ = १६ चतुर्घात (वर्ग-वर्ग)

'कस्याश्चित्संख्याया घातानामाहतिस्तावत्।
तद् घातमापकयुतेः समानमानैव निर्दिष्टा॥'

जैसा, २ का दो-तीन-चार घातों का घात, २ का नव-घात होगा। अर्थात् ४ × ८ × १६ = ५१२

'संघटते संख्याया घातस्याभीष्टघातोऽपि ।
तद् घातमापकहतेः समान एवात्र नियमेन ॥'

जैसा, $२^{३ \times ३} = २^{९} = ५१२$.

'एकस्या यो घातः स एव घातः परस्याश्च ।
तद् घातस्यापि तथा प्राक्परघाताहतिस्तृतीयः स्यात् ॥

जैसा, $२^{२} = ४$, $४^{२} = १६$, $(२ \times ४)^{२} = ६४$.
और, $४ \times १६ = ६४$.

'कस्या अपि संख्यायाः सैव स्यादेकघात इह नूनम् ।
एकश्च शून्यघातो न्यरूपि संशोधकाचार्यैः ॥'

किसी संख्या का एक घात वही संख्या होती है और शून्य घात १ एक होता है ।

'एकस्य १ कोऽपि घातः संगच्छत एक एवात्र ।
शून्यस्य ० शून्यघातं विहाय यः कोऽपि शून्यं स्यात् ॥

अर्थात्—एक का कोई घात एक ही होता है और शून्य का प्रत्येक घात शून्य होता है ।

संयुक्तपद के वर्ग का प्रकारान्तर ।

१२. प्रथम केवल पद का वर्ग करके, द्विगुण केवल पद से अगले पदों को गुणना । फिर द्वितीय केवल पद का वर्ग करके, द्विगुण केवल पद से उसके अगले पदों को गुणना । इस प्रकार अन्त तक क्रिया करके यथासंभव पदों को जोड़ने से वर्ग सिद्ध होगा ।

श्लोक ।

'कृतिं पदस्य पूर्वस्य कृत्वा, द्विघ्नेन तेन वा ।
हन्यादन्यपदान्येवं द्वितीयादेर्युती कृतिः ॥'

(१) $(य^2 + २य - १)^2 = य^4 + ४य^3 + २य^2 - ४य + १$

(२) $(२य + ५र)^2 - (२य - ५र)^2 = ४०यर.$

मूल-क्रिया।

१३. जिस संयुक्त पद का वर्गमूल लाना हो, उसको ऐसा लिखना चाहिए कि जिसमें किसी एक वर्ण के घातमापक क्रम से घटते या बढ़ते हुए रहें। फिर उसके प्रथम पद में, वर्ग घटाकर मूल को दाहने लब्धि स्थान में और मूल को दूना करके बाएँ भाजक-स्थान में लिखना। पुनः उस (दूने मूल) का शेष के प्रथम पद में भाग देने से, जो लब्धि मिलने योग्य हो, उसको लब्धि स्थान तथा भाजक स्थान में जोड़ देना। फिर उस लब्धि गुणित भाजक (पंक्ति) को शेष में घटा देना। पहले फल को और दूने इस फल को नीचे पंक्ति में लिखना। इस प्रकार अन्त तक क्रिया करने से लब्धि स्थान में वर्गमूल होगा।

श्लोक।

'स्यान्मानकोऽत्रापचितश्चितो वा
यथा तथा न्यस्य हि वर्गराशिम्
आद्यात् पदाद् वर्गमपास्य मूलं
दद्ये निदध्याद् द्विगुणं तु पङ्क्त्याम्॥
अनेन भक्ते तु पदे तदाद्ये
यल्लभ्यते तद् विनियोज्य दद्ये।
पङ्क्त्यां च, तेनैव हताथ पङ्क्ति-
रपासनीयोर्वरितात्ततश्च॥
एतत्फलं द्व्याहतमन्यपङ्क्त्यां
पूर्वेण लब्धेन सहाकलय्य।

पङ्क्त्या विभक्ते तु पदे तदाद्ये
शेषे विधेयं पुनरेवमत्र ॥'

(१) $य^{४}+४य^{३}र+४य^{२}र^{२}+६य^{२}+१२यर+९$ ($य^{२}+२यर+३$
$य^{४}$ वा, $-य^{२}-२यर-३$.

$२य^{२}+यर$) $+४य^{३}र+४य^{२}र^{२}$
$+४य^{३}र+४य^{२}र^{२}$.

$२य^{२}+२यर+३$) $+६य^{२}+१२यर+९$
$+६य^{२}+१२यर+९$
. . .

जब 'घातमापकसाम्ये स्यात्—' (११) के अनुसार धन व ऋण राशि का समद्विघात (वर्ग) धन ही होता है, तो धन राशि का वर्गमूल धन वा, ऋण दोनों हो सकता है। आचार्य ने भी कहा है—'स्वमूले धनर्णे' इसलिए यहाँ मूल को ऋण भी जानना चाहिए।

(२) $९य^{६}-१२य^{५}र+४य^{४}र^{२}-६य^{३}+४य^{२}र+१$) $३य^{३}-२य^{२}र-१$
$९य^{६}$

$६य^{३}-२य^{२}र$) $-१२य^{५}र+४य^{४}र^{२}$
$-१२य^{५}र+य^{४}र^{२}$

$६य^{३}-४य^{२}र-१$) $-६य^{३}+४य^{२}र+१$
$-६य^{३}+४य^{२}र+१$
. . .

(३) $१६य^{८}+२२४य^{६}+७८४य^{४}+३९२य^{४}+२७४४य^{२}$ $+२४०१$ इसका चतुर्घात-मूल क्या है ?
दो बार वर्गमूल लेने से उत्तर $= २य^{२}+७$.

(४) $\frac{१}{४}-य$ इसका वर्गमूल क्या होगा ?

$$\sqrt{\tfrac{१}{४} - \text{य}}\;(\tfrac{१}{२} - \text{य} - \text{य}^{२} - २\text{य}^{३} - ५\text{य}^{४} - \text{इत्यादि}$$

मूल अनन्त श्रेढी कही जाती है।

$$\therefore \tfrac{१}{४} - \text{य}$$

$$\tfrac{१}{४}$$

$$१ - \text{य})\quad -\text{य}$$

$$-\text{य}+\text{य}^{२}$$

$$१-२\text{य}-\text{य}^{२})\quad -\text{य}^{२}$$

$$-\text{य}^{२}+२\text{य}^{३}+\text{य}^{४}$$

$$१-२\text{य}-२\text{य}^{२}-२\text{य}^{३})\quad -२\text{य}^{३}-\text{य}^{४}$$

$$२\text{य}^{३}+४\text{य}^{४}+४\text{य}^{५}+४\text{य}^{६}$$

$$१-२\text{य}-२\text{य}^{२}-४\text{य}^{३}-५\text{य}^{४})\quad -५\text{य}^{४}-४\text{य}^{५}-४\text{य}^{६}$$

$$-५\text{य}^{४}+१०\text{य}^{५}+१०\text{य}^{६}+२०\text{य}^{७}+२५\text{य}^{८}.$$

$$-१४\text{य}^{५}-१४\text{य}^{६}-२०\text{य}^{७}-२५\text{य}^{८}\;\cdot\cdot\;\text{इत्यादि अनन्त।}$$

महत्तमापवर्तन।

१२. जिन पदों से उद्दिष्ट बीजात्मक पद निःशेष भाजित होते हैं, वे उनके अपवर्तन कहलाते हैं। और उनमें सबसे बड़े अपवर्तनाङ्क को, उन पदों का महत्तमापवर्तन कहते हैं।

जैसा, अतयर और क य त ल ये पद त, य और तय इन तीन पदों से निःशेष भाजित होते हैं, इसलिए ये तीनों, उक्त दोनों पदों के अपवर्तन हुए। परंतु इनमें तय अपवर्तन बड़ा है, इसलिए यही महत्तमापवर्तन हुआ। यहाँ महत्तमापवर्तन को सदा धन ही मानते हैं।

प्रकार—

१३. यदि किसी केवल पद का उद्दिष्ट पदों में, निःशेष भाग लगता हो, तो पहले उनको भाग देकर लघु कर लेना। यदि भाग न लगे, तो वे स्वयं लघु हैं। उन लघु पदों में, जिसका जिसमें भाग लगे, उसका उसमें भाग देना। जो शेष बचे, उसका उसके भाजक में भाग

देना। इस प्रकार, परस्पर में बार-बार भाग देने से, जिस शेष से उसका भाजक निःशेष भाजित होगा, वह उन लघुपदों का महत्तमापवर्तन होगा। यदि पहले उद्दिष्ट पद, केवल पद से भाजित हों तो, उस (केवलपद) से इस महत्तमापवर्तन को गुणा देने से वह उन लघुपदों का महत्तमापवर्तन होगा। यदि उद्दिष्ट पद दो से अधिक हों तो, पहले उक्त रीति से दो पदों का महत्तमापवर्तन निकालकर, फिर उस महत्तमापवर्तन और तीसरे पद का महत्तमापवर्तन सिद्ध करना। इसी प्रकार आगे क्रिया करनी। अन्त में जो महत्तमापवर्तन निकलेगा, वही उद्दिष्ट पदों का महत्तमापवर्तन होगा।

श्लोक।

'केवलपदेन भाज्ये पदे यथा नापरेण भज्येते।
ते लघुपदे भवेतामथवा स्वयमेव ये लघुनी॥
अनयोर्मिथो विहृतयोर्यच्छेषेणात्मभाजकः शुध्येत्।
तद्भवति महत्तमापवर्तनमपवर्तिते गुणितम्॥
अग्रे त्वस्य परस्य च पदस्य संसाधयेदिदं प्राग्वत्।
केवलपदानि चेत् स्युस्तदापवर्तादिनैवैतत्॥'

(१) $य^2+६य+८$ और $य^2+५य+६$ का महत्तमापवर्तन क्या है?

$य^2+५य+६$) $य^2+६य+८$ (१
$य^2+५य+६$
―――――――
$य+२$

$य+२$) $य^2+५य+६$ ($य+३$
$य^2+२य$
―――――――
$३य+६$
$३य+६$
―――――――
. .

य + २ यह उद्दिष्ट पदों का महत्तमापवर्तन हुआ। इससे भाजित उद्दिष्ट पद दृढ़ कहलाते हैं *।

लघुतमापवर्त्य।

१४. यदि एक राशि में, दूसरी राशि का निःशेष भाग लग जाय, तो पहली राशि को अपवर्त्य कहते हैं। और यदि एक राशि में दो या, अधिक राशियों का अलग-अलग निःशेष भाग लग जाय, तो पहली राशि को उन राशियों का अपवर्त्य कहते हैं। इसी प्रकार, यदि किसी दूसरी सबसे छोटी राशि में, उन राशियों का निःशेष भाग लग जाय, तो छोटी राशि को लघुतमापवर्त्य कहते हैं।

जब एक राशि, दूसरी राशि का अपवर्त्य हो तो, दूसरी राशि अपवर्त्य का एक गुणक रूप अवयव होगी। और जो दो या, अधिक राशियों की एक राशि अपवर्त्य हो तो, प्रत्येक राशि अपवर्त्य का गुणकरूप अवयव होगी।

और यदि तीन या, अधिक पदों का लघुतमापवर्त्य जानना हो तो, पहले दो पदों का ज्ञात करके, शेष पदों में से किसी एक के साथ लघुतमापवर्त्य जानना, इस प्रकार शेष पदों के साथ क्रिया करने से, अन्त में जो फल सिद्ध होगा वही अभीष्ट लघुतमापवर्त्य है।

(१) जैसा, ५ का १५ अपवर्त्य है, क्योंकि १५ में ५ का तीन बार भाग लग जाता है और ३ का भी १५ अपवर्त्य है, क्योंकि उसमें ३ का ५ बार ठीक भाग लग जाता है। इसलिए ५ और ३ का १५ अपवर्त्य है। ऐसे ही ५ और ३ के ३० और ४५ भी अपवर्त्य हैं। परन्तु उन सबों से छोटा १५ है, इसलिए ५ और ३ का १५ लघुतमापवर्त्य हुआ।

---

* पूज्यपाद श्री ६ द्विवेदीजी ने यहीं तक 'बीजपरिचय' किसी समय लिखा था। यहाँ उसका स्वरूप दिखलाया है। विशेष श्रीबापूदेव शास्त्रीजी के 'हिन्दी-बीजगणित' में देखना चाहिए।

इसी प्रकार, यहाँ २ अक, अ का अपवर्त्य है; क्योंकि २ अक में अ, × २ क बार जा सकता है, ऐसे ही २ अक क का भी अपवर्त्य है। अर्थात् अ और क का २ अक अपवर्त्य है और अक लघुतमापवर्त्य है। जैसे ३, १० और ६ का लघुतमापवर्त्य ३, १, २, ५ ये भिन्न गुणक रूप अवयव होते हैं, इसका गुणन = ३० होता है। इसी प्रकार, २ अ, ६ अक और ८ अक इन का लघुतमापवर्त्य—२ अ = २ × अ; ६ अ क = २×३×अक ८ अ क = २ × २ × २ अ क। इन में २, ३ अ और क भिन्न गुणकरूप अवयव हैं और एक राशि में २ संख्या तीन बार आई हैं, इस कारण २ × २ × २ × ३ अक = २४ अक, यह लघुतमापवर्त्य हुआ।

(२) दो वा अधिक संयुक्त पदों का लघुतमापवर्त्य जानने के लिए कल्पना किया—क और ख दो पदों के द्योतक हैं और घ उनका महत्तमापवर्तन है।

क = त घ, ख = थ घ तो महत्तमापवर्तन की रीति से त और थ में कोई साधारण गुण्य-गुणक रूप अवयव नहीं हैं, इसलिए त थ उनका लघुतमापवर्त्य है और सबसे लघुपद त थ घ है। यहाँ त थ और थ घ का निःशेष भाग लग सकता है और त थ घ= थ क = त ख = $\frac{\text{क ख}}{\text{घ}}$ । इससे सिद्ध होता है कि—पदों के गुणनफल में उनके महत्तमापवर्तन का भाग देना चाहिए अथवा, एक पद में उनके महत्तमापवर्तन का भाग देना और भजनफल को दूसरे पद से गुणा करना।

जैसा, अ^2 − ४ अ + ३ और ४ अ^3 − ९ अ^2 − १५ अ + १८ इसका लघुतमापवर्त्य निकालना है, तो इनका महत्तमापवर्तन अ − ३ है, अ^2 − ४ अ + ३ में अ − ३ का भाग देने से भजनफल अ − १ मिला, इसलिए (अ − १) (४ अ^3 − ९ अ^2 − १५ अ + १८) लघुतमापवर्त्य है और गुणन से,

४ अ^४ − १३ अ^३ − ६ अ^२ + ३३ अ − १८ फल मिला। यह स्पष्ट है कि अ − १ का निःशेष भाग ४ अ^३ − ९ अ^२ − १५ अ + १८ में लगता है, इसलिए क्रिया करने से (अ − ३) (अ − १) (४ अ^२ + ३ अ − ६) लघुतमापवर्त्य हुआ। परन्तु यह स्मरण रखना चाहिए कि लघुतमापवर्त्य को गुण्य गुणक खण्डों में लिखने से सुभीता पड़ता है।

महत्तमापवर्तन और लघुतमापवर्त्य के आपस में सम्बन्ध और विभिन्न गणितों की व्याप्ति के उदाहरण पूर्वोक्त हिन्दी बीजगणित में देखना आवश्यक है।

भिन्न।

१५· भिन्न शब्द का अर्थ व्यक्तगणित में और यहाँ पर एक ही है। जैसे $\frac{अ}{क}$ से ज्ञात होता है कि एक या, पूरी राशि क तुल्य भागों में विभाजित हुई है। और उन भागों में से अ भाग लिये गये हैं। $\frac{अ}{क}$ भिन्न है, अ अंश, क छेद कहा जाता है। छेद या, हर से ज्ञात होता है कि एक की संख्या कितने तुल्य भागों में विभाजित हुई है। और अंश सूचित करता है कि उन में से कितने भाग लिये गये हैं। यहाँ अंश और छेद की राशियों के स्थान में इष्ट संख्या की कल्पना भी कर सकते हैं।

(१) भिन्न के अंश और हर को किसी राशि से गुणने पर उनके मान में अन्तर नहीं पड़ता।

जैसा, $\frac{अ}{क} = \frac{२ अ}{२ क} = \frac{३ अ}{३ क} = \frac{न अ}{न क}$;

इसलिए, $\frac{अ}{क} = \frac{३ अ}{३ क} = \frac{न अ}{न क}$; यहाँ न के स्थान में इष्ट संख्या मान सकते हैं।

$\frac{\text{न अ}}{\text{न क}}$ में १ के न क तुल्य खण्ड हुए हैं। और $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ में १ के क तुल्य खण्ड हुए हैं। इसलिए $\frac{\text{न अ}}{\text{न क}}$ का प्रत्येक खण्ड $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ के प्रत्येक खण्ड का $\frac{१}{\text{न}}$ भाग है। क्योंकि किसी संख्या में बड़ी संख्या का भाग दिया जाय और उसी में छोटी का भी भाग दिया जाय तो पहली लब्धि दूसरी से छोटी होगी। इसलिए १ के न क भाग को न बार लें तो, $\frac{\text{न अ}}{\text{न क}}$, $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ के तुल्य है। क्योंकि $\frac{\text{न अ}}{\text{न क}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$ इससे सिद्ध होता है कि किसी भिन्न के अंश और हर में एक ही राशि का भाग देने से भिन्न का मान वही बना रहता है।

$$(१)\ \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{अ} \times \text{ग}}{\text{क} \times \text{ग}} = \frac{\text{अ ग}}{\text{क ग}}\ ।$$

$$(२)\ \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{अ} \times \text{घ च}}{\text{क} \times \text{घ च}} = \frac{\text{अ घ च}}{\text{क घ च}}\ ।$$

$$(३)\ \frac{\text{अ} - \text{य}}{\text{य}} = \frac{२\,\text{अ} - २\,\text{य}}{२\,\text{य}}\ ।$$

$$(४)\ \frac{\text{अ} - \text{य}}{\text{य}} = \frac{\text{अ}^२ - \text{अ य}}{\text{अ य}}\ ।$$

$$(५)\ \frac{१ - \text{य}}{१ + \text{य}} = \frac{\text{र} - \text{य र}}{\text{र} + \text{य र}}\ ।$$

इन उदाहरणों से ज्ञात होता है कि इस रीति से भिन्नों का लघुतम रूप हो जाता है, और मानों में कोई अन्तर नहीं पड़ता।

जैसा, $\frac{२ अ य}{३ य} = \frac{२ अ}{३}$ । $\frac{४ अ क ग}{२ अ ग} = क २$ ।

$\frac{२ य^2 - ३ य}{५ य} = \frac{२ य - ३}{५}$ । इत्यादि ।

संकलन और व्यवकलन ।

१६. व्यक्तगणित की 'अंशाहतिश्छेदवधेन भक्ता—, इस रीति से भिन्नपदों का समच्छेद करके योग किंवा अन्तर किया जाता है ।

(१) यदि समान छेद हो जैसे $\frac{अ}{क} + \frac{ग}{क} = \frac{अ + ग}{क}$ योग हुआ । यदि $\frac{अ}{क} + \frac{ग}{घ}$ ऐसा पद हो तो—

$$\frac{अ}{क} + \frac{ग}{घ} = \frac{अ घ}{क घ} + \frac{क ग}{क घ} = \frac{अ घ + क ग}{क घ}$$

(२) $\frac{अ}{क}, \frac{ग}{थ}, \frac{च}{ज}$, इनका योग— $\frac{अ}{क} = \frac{अ घ ज}{क घ ज}$, $\frac{ग}{घ}$ $= \frac{ग \times क ज}{घ \times क ज} = \frac{क ग ज}{क घ ज}$; क्योंकि, $ग \times क = क ग$ और $घ \times क = क घ$ । इसी प्रकार $\frac{च}{ज} = \frac{क घ \times च}{क घ \times ज} = \frac{क घ च}{क घ ज}$,

इस कारण $\frac{अ}{क} + \frac{ग}{घ} + \frac{च}{ज} = \frac{अ ग च}{क घ ज} + \frac{क ग ज}{क घ ज} + \frac{क घ च}{क घ ज}$ $= \frac{अ घ ज + क ग ज + क घ च}{क घ ज}$ । इस प्रकार चार या अधिक भिन्नपदों का योग होता है ।

(३) यदि $\frac{अ}{क} - \frac{ग}{क} = \frac{अ - ग}{क}$ और $\frac{अ}{क} - \frac{ग}{घ} = \frac{अ घ - क ग}{क घ}$

किसी राशि को भिन्न का रूप देना हो तो, उसके नीचे १ हर लिख देना। $\text{अ} = \frac{\text{अ}}{१}$, $\text{य} = \frac{\text{य}}{१}$, $\text{अ} - \text{क} = \frac{\text{अ} - \text{क}}{१}$ आदि।

क्योंकि, $\text{अ} = \frac{\text{अ} \times १}{१} = \frac{\text{अ}}{१}$।

यह जानना चाहिए कि हरों के लघुतमापवर्त्य में प्रत्येक भिन्न के हर का निःशेष भाग लग जाता है। इसलिए लब्धियों से अपने अपने अंश और हर को गुणाने से भिन्नों के समच्छेद लघुतमरूप में हो जाते हैं। जैसा, $\frac{७ \text{ य}}{६}$, $\frac{३ \text{ य}}{५}$, $\frac{\text{य}}{३०}$ इनका लघुतम रूप समच्छेद ३० है।

$$\frac{७ \text{ य}}{६} = \frac{३५ \text{ य}}{३०}, \quad \frac{३ \text{ य}}{५} = \frac{१८ \text{ य}}{३०},$$

$$\therefore \text{योग} = \frac{३५ \text{ य} + १८ \text{ य} + \text{य}}{३०} = \frac{५४ \text{ य}}{३०} = \frac{९ \text{ य}}{५}।$$

(४) $\frac{२ \text{ अ}}{७ \text{ क}} - \frac{९ \text{ अ}}{७ \text{ क}}$, यहाँ, $\frac{९ \text{ अ}}{७ \text{ क}} - \frac{२ \text{ अ}}{७ \text{ क}} =$

$$\frac{९ \text{ अ} - २ \text{ अ}}{७ \text{ क}} = \frac{७ \text{ अ}}{७ \text{ क}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}।$$

इसी प्रकार, $\frac{३ \text{ य}}{२४ \text{ र}} - \frac{३ \text{ य}}{४ \text{ र}}$, यहाँ भी, $\frac{३ \text{ य}}{४ \text{ र}} = \frac{६ \times ३ \text{ य}}{६ \times ४ \text{ र}}$

$$= \frac{१८ \text{ य}}{२४ \text{ र}}।$$

$$\therefore \text{अन्तर} = \frac{१८ \text{ य}}{२४ \text{ र}} - \frac{३}{२४ \text{ र}} = \frac{१५ \text{ य}}{२४ \text{ र}} = \frac{५ \text{ य}}{८ \text{ र}}।$$

गुणन और भागहार।

१७. व्यक्तगणित के 'अंशाहतिश्छेदवधेन' और 'छेदं लवं च

परिवर्त्य—' इन नियमों के अनुसार भिन्नों का पूर्णाङ्क किंवा भिन्नाङ्क से गुणन-भजन होता है। भिन्न के अंश को गुणाकर घात के नीचे उसका हर रख देना। जैसे $ग \times \frac{अ}{क} = \frac{अ ग}{क}$ । $\frac{अ}{क}$ और $\frac{अ ग}{क}$ इन दोनों भिन्नों में, १ के क तुल्य खण्ड हुए हैं और $\frac{अ}{क}$ भिन्न में वैसे तुल्य खण्ड अ लिये हैं और $\frac{अ ग}{क}$ भिन्न में अ के तुल्य खण्ड ग बार लिये हैं। इस कारण $\frac{अ ग}{क}$ भिन्न $\frac{अ}{क}$ भिन्न की अपेक्षा ग बार बड़ा है।

(१) यदि $\frac{अ}{क}$ को २ से गुणना है—

घात $= \frac{२ अ}{क}$, क्योंकि दो गुणा $\frac{अ}{क} = \frac{अ}{क} + \frac{अ}{क} = \frac{अ + अ}{क} = \frac{२ अ}{क}$ ।

(२) $\frac{अ - य}{क}$ को २ अ से गुणा तो, घात $= २ अ \times \frac{अ - य}{क} = \frac{२ अ^{२} - २ अ य}{क}$ ।

(३) $\frac{अ - य}{र}$ को $\frac{६}{य}$ से गुणा तो, $\frac{६}{य} \times \frac{अ - य}{र} = \frac{६ अ - ६ य}{य र}$ । इत्यादि ।

इसी प्रकार भाग का भी विषय जानना चाहिए। यदि भिन्न के अंश में पूर्णाङ्क का पूरा भाग लग जाय तो लब्धि के नीचे भिन्न के हर

को रख देना। या, भिन्न के हर को पूर्णाङ्क से गुणा के घात को हर मानकर, इसके ऊपर भिन्न का अंश लिखना।

जैसा, $\frac{\text{अ ग}}{\text{क}} \div \text{ग} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}$ और $\frac{\text{अ}}{\text{क}} \div \text{ग} = \frac{\text{अ}}{\text{क ग}}$।

अथवा, $\frac{\text{७ अ} - \text{७ य}}{\text{अ} + \text{य}}$ इसमें म का भाग दिया, क्योंकि, अंश $\div$ ७ $=$ अ $-$ य।

$\therefore$ लब्धि $= \frac{\text{अ} - \text{य}}{\text{अ} + \text{य}}$।

(४) यदि भिन्न भाजक हो तो ऊपर जो 'छेदं लवं च....' श्लोक लिखा है, उसके अनुसार — $\frac{\text{२ अ क}}{\text{३ य र}} \div \frac{\text{अ क}}{\text{य र}}$,

यहाँ पर, $\frac{\text{२ अ क}}{\text{३ य र}} \div \frac{\text{म}}{\text{क}} = \frac{\text{२ अ क}}{\text{३ य र}} \times \frac{\text{य}}{\text{क}} = \frac{\text{२ अ क य}}{\text{३ क य र}}$

$= \frac{\text{२ अ}}{\text{३ र}}$।

(५) $\frac{\text{२ अ}^{२}\text{क}}{\text{१०य}^{२}\text{र}^{२}} \div \frac{\text{अ क}}{\text{य र}} = \frac{\text{२ अ}^{२}\text{क}}{\text{१०य}^{२}\text{र}^{२}} \times \frac{\text{२ य र}}{\text{अ क}}$

$= \frac{\text{२ अ} \cdot \text{अ क} \cdot \text{२ य र}}{\text{५ य र} \cdot \text{२ य र} \cdot \text{अ क}} = \frac{\text{२ अ}}{\text{५ य र}}$।

(६) $\frac{\text{अ}^{२} - \text{य}^{२}}{\text{अ य}} \div \frac{\text{अ} + \text{य}}{\text{अ}}$।

यहाँ पर, $\frac{\text{अ}^{२} - \text{य}^{२}}{\text{अ य}} \times \frac{\text{अ}}{\text{अ} + \text{य}} = \frac{\text{अ} - \text{य}}{\text{य}}$।

(७) $\frac{\text{१} + \text{य}^{२} + \text{२ य}}{\text{३ य}} \div \frac{\text{१} + \text{य}}{\text{२ य}}$।

$$\text{लब्धि} = \frac{१ + य^{२} + २ य}{३ य} \times \frac{२ य}{१ + य} = \frac{१ + य}{३}$$

$$\times \frac{१ + य}{य} \times \frac{२ य}{१ + य \,.\, ३} = \frac{१ + य}{३} \times २ = \frac{२ + २ य}{३} \text{ ।}$$

इसी प्रकार अभ्यासार्थ अनेक उदाहरण करने चाहिए । भिन्नों की घातक्रिया, मूलक्रिया आदि हिन्दी बीजगणित में देखना चाहिए ।

करणी ।

१८· जिस राशि का वर्गमूलादि अपेक्षित है, परन्तु निःशेष मूल नहीं मिलता है, तो उस मूल को करणी कहते हैं । करणी को सूचित करने के लिए उसके आदि में उस मूल का द्योतक चिह्न लिखते हैं ।

(१) जैसा, २ का वर्गमूल अभीष्ट है पर वह मूल कोई निःशेष संख्या नहीं है, न भिन्न है, न अभिन्न है । इसलिए इसको $\sqrt{२}$ या $२^{\frac{१}{२}}$ इस चिह्न से लिखते हैं । अ कोई पूरा वर्ग नहीं है, इसलिए $\sqrt{अ}$ या, $अ^{\frac{१}{२}}$ यह करणी है । इसी प्रकार, $\sqrt{अ+क}$, या, $(अ + क)^{\frac{१}{२}}$, $\sqrt[३]{अ^{२} + २ अ क}$, या, $(अ^{२} + २ अ क)^{\frac{१}{२}}$ इत्यादि सब करणी हैं ।

(२) मूल में 'द्विकाष्टमित्योस्त्रिभसंख्ययोश्च—' इत्यादि करणी के योग और वियोग का उदाहरण है । इन चिह्नों के अनुसार उस का गणित—

$$\sqrt{८} + \sqrt{२} = \sqrt{२ \times ४} + \sqrt{२} = २\sqrt{२} + \sqrt{२} = (२+१)\sqrt{२} = ३\sqrt{२} \text{ ।}$$

$$= \sqrt{९ \times २} = \sqrt{१८} \text{ । अन्तर में — } \sqrt{८} - \sqrt{२} = २\sqrt{२} - \sqrt{२} = (२-१)\sqrt{२} = \sqrt{२} \text{ ।}$$

इसी प्रकार, 'त्रिभसंख्ययोश्च' इस उदाहरण की क्रिया इस प्रकार है—

$\sqrt{२७} + \sqrt{३} = \sqrt{९ \times ३} + \sqrt{३} = ३\sqrt{३} + \sqrt{३} = (३ + १)\sqrt{३} = ४\sqrt{३} = \sqrt{१६ \times ३} = \sqrt{४८}$ ।

और,

$\sqrt{२७} - \sqrt{३} = \sqrt{९ \times ३} - \sqrt{३} = (३ - १)\sqrt{३} = २\sqrt{३}, = \sqrt{४ \times ३} = \sqrt{१२}$ ।

(३) यहाँ करणियों के भेदों को जानना चाहिए। जिन राशियों में करणी न हो उनको अकरणीगत राशि कहते हैं। जैसा, $अ^२ + अ व, य^३ + य र - य^३$ इत्यादि। और जिन राशियों में करणी हो वह करणीगत है। जैसा, $\sqrt[३]{५}$, $२ + \sqrt{३ य}$, $अ + \sqrt{ब}$ इत्यादि सब करणी हैं।

इसी प्रकार, जिस करणी में कोई अकरणीगत राशि गुणक हो उसको मिश्रकरणी और जिसमें गुणक नहीं है उसको अमिश्र-करणी कहते हैं। जैसा ; $२\sqrt{३}$ और $अ\sqrt{क}$ और $\sqrt{८}$, $\sqrt[३]{अ^३ य}$ ।

और जिस करणी में जितना मूलमापक होगा, उतने घात मूल की वह करणी होती है। जैसा $\sqrt{अ}$ यह वर्गमूल करणी है और $\sqrt[३]{अ - क}$ यह घनमूल करणी है। $\sqrt[४]{य^२ - ३ य}$ यह चतुर्घात मूल करणी है।

(४) जिन करणियों के मूलमापक समान हैं उनको समूल करणी कहते हैं और जिनके मूलमापक विषम हैं, उनको विमूल करणी कहते हैं। जैसा, $\sqrt{५}$, $३\sqrt{७}$, $२\sqrt{अ}$ अथवा, $\sqrt[३]{अ}$, $\sqrt[३]{१०}$ सब समूल हैं। और $\sqrt{२}$, $\sqrt[३]{अ}$, $\sqrt[४]{क}$ इत्यादि विमूल हैं।

(५) जिन समूल करणियों में करणीगत अवयव समान हैं उनको सजातीय और जो सजातीय नहीं हैं उनको विजातीय कहते हैं। जैसा, $३\sqrt{३}$, $५\sqrt{३}$, अथवा, $\sqrt[३]{अ}$, $क\sqrt[३]{अ}$ और $\sqrt{३}$, $\sqrt[३]{३}$, $\sqrt{५}$ विजातीय हैं और जो करणी

अ $\pm$ $\sqrt{}$क अथवा, $\sqrt{}$अ $\pm$ $\sqrt{}$क इस रूप की होती है, उनको द्वियुकरणी कहते हैं।

(६) किसी अकरणीगत पद को करणी का रूप देने का प्रकार यह है कि उस पद का वर्गादि घात करके उसमें उस करणी का मूल चिह्न लगा देना चाहिए।

जैसा, + अ इसका वर्गमूल करणी रूप = + $\sqrt{अ^२}$। और − अ का = − $\sqrt{अ^२}$। यहाँ $\sqrt{अ^२}$ का वर्गमूल $\pm$ अ यह होता है। करणी के वास्तव मान के धनर्णत्व को स्पष्ट करने के लिए $\sqrt{}$ इस चिह्न के आदि में धन-ऋण चिह्न करते हैं इसीलिये आचार्य ने करणीषड्विध में 'क्षयो भवेच्च क्षयरूपवर्गः —' इत्यादि लिखा है। इस प्रकार, $\pm$२ इसका घनमूल-करणी रूप = $\sqrt[३]{\pm ८}$ = $\sqrt[३]{८}$ यह होता है।

(७) अभिन्न करणियों के गुणन-भजन में गुण्य-गुणक अथवा भाज्य-भाजक रूप करणी यदि विमूल हों तो उनको समूल करके फिर आगे की क्रिया करनी चाहिए।

जैसा आचार्योक्त 'द्वित्र्यष्टसंख्या गुणकः करण्यो —' इत्यादि उदाहरण में—

$(\sqrt{२} + \sqrt{३} + \sqrt{८}) \times (\sqrt{३} + ५)$

$\sqrt{२} \times \sqrt{३} + \sqrt{३} \times \sqrt{३} + \sqrt{२ \times ४} \times \sqrt{३}$
$+ ५ \times \sqrt{२} + ५ \times \sqrt{३} + ५ \times \sqrt{२ \times ४}$

$\sqrt{६} + ३ + २\sqrt{६} + ५\sqrt{२} + ५\sqrt{३} + १०\sqrt{२}$

$३ + ३\sqrt{६} + १५\sqrt{२} + ५\sqrt{३}$। गुणनफल हुआ।

अथवा—

$३ + \sqrt{६ \times ६} + \sqrt{२२५ \times २} + \sqrt{२५ \times ३}$
$= ३ + \sqrt{५४} + \sqrt{४५०} + \sqrt{७५}$।

इसी प्रकार मूलोक्त प्रथम उदाहरण में—

भाज्य $= \sqrt{९} + \sqrt{४५०} + \sqrt{७५} + \sqrt{५४}$
$= ३ + १५\sqrt{२} + ५\sqrt{३} + ३\sqrt{६}$।

और भाजक $= \sqrt{२} + \sqrt{३} + \sqrt{८} = \sqrt{२} + \sqrt{३} + २\sqrt{२}$
$= \sqrt{३} + ३\sqrt{२}$ । इस प्रकार—

$$\sqrt{३}+३\sqrt{२} \,)\, ३+३\sqrt{६}+५\sqrt{३}+१५\sqrt{२} \,(\, \sqrt{३}+५ = \text{लब्धि} ।$$
$$\underline{३+३\sqrt{६}}$$
$$५\sqrt{३}+१५\sqrt{२}$$
$$\underline{५\sqrt{३}+१५\sqrt{२}}$$
....

इस प्रकार अभ्यासार्थ कई उदाहरण करने चाहिए ।

अब करणीवर्ग के लिए मूलोक्त प्रथम उदाहरण में—
$(\sqrt{२} + \sqrt{३} + \sqrt{५})^२$ 'स्थाप्योन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्ना:' इत्यादि रीति से—

$$= \sqrt{२^२} + २\sqrt{२\times३} + २\sqrt{२\times५} + \sqrt{३^२} + २\sqrt{३\times५} + \sqrt{५^२} ।$$
$$= २ + \sqrt{४\times२\times३} + \sqrt{४\times२\times५} + ३ + \sqrt{४\times३\times५} + ५ ।$$
$$= २+३+५+\sqrt{२४} + \sqrt{४०} + \sqrt{६०} ।$$

अर्थात् = रु १० क २४ क ४० क ६० सिद्ध हुआ । इसी प्रकार वर्गमूल आदि की क्रिया को भी समझना चाहिए ।

समीकरण ।

(१६) जब दो बीजात्मक पद परस्पर तुल्य होते हैं और उनके मध्य में = यह चिह्न होता है, तो उसको समीकरण कहते हैं । और सम चिह्न के द्वारा युक्त पदों को पक्ष कहते हैं । बाईं ओर के पक्ष को प्रथम पक्ष अव्यक्त और दाहनी ओर के पक्ष को दूसरा पक्ष व्यक्त कहते हैं । समीकरण दो प्रकार के होते हैं, एक प्राकृत दूसरा कल्पित । प्राकृत समीकरण के दोनों पक्षों का साम्य स्वाभाविक रहता है । इसलिए उसके पदों के वर्णों के स्थान में इष्ट संख्या मान सकते हैं और कल्पित समीकरण के पक्षों का साम्य किसी

नियत नियम के अनुसार होता है, वहाँ मनमानी कोई संख्या किसी वर्ण के स्थान में नहीं मान सकते ।

इस प्रकार, अ + य = अ + य

अथवा, $\frac{\text{अ}^2 - \text{य}^2}{\text{अ} + \text{य}}$ = अ−य यह प्राकृत समीकरण है ।

और, य + अ = क, इसका अर्थ है कि य एक ऐसी नियत संख्या है कि जिसमें अ को जोड़ देने से, योग क के समान होता है । यह कल्पित समीकरण है । इस में अव्यक्त का मान वह है, जिससे उस समीकरण में उत्थापन करने से वह समीकरण प्राकृत हो जाय अर्थात् दोनों पक्ष एकरूप हो जायँ जैसा, य + अ = क, इसमें य अव्यक्त है और अ, क व्यक्त पद हैं, यहाँ य का मान क−अ है । क्योंकि उत्थापन से य के स्थान में क−अ को रखने से, क−अ + अ = क या, क = क ।

(१) जिस में एक ही अव्यक्त है उसको एकवर्ण समीकरण और जिस में अनेक अव्यक्त हैं, उसको अनेकवर्ण समीकरण कहते हैं । छेदगम, अपवर्तन आदि क्रिया के बाद समीकरण में, सबसे बड़ा जो घात रहता है, उसी घात के नाम का वह समीकरण कहलाता है । जैसा य = अ यह एकघात-समीकरण है । यदि समीकरण में अव्यक्त का सबसे बड़ा घात वर्ग ही हो तो वह वर्गसमीकरण होता है, इसके केवल वर्गसमीकरण और मध्यमाहरण दो भेद हैं । जैसा, अ य^2 + क = ०, यह केवल वर्गसमीकरण है ।

और अय^2+कय=ग, यह मध्यमाहरण है । इसी प्रकार घनसमीकरण आदि को भी समझना चाहिए ।

(२) अभ्यासार्थ समीकरणों का स्वरूप प्रदर्शन किया जाता है—

(क) ७य+३=२य+२३, इसमें य का मान क्या है ?

पक्षान्तरानयन से, ७ य − २ य = २३ − ३

योग करने से, ५ य = २०

भाग देने से, $य = \frac{२०}{५} = ४$ यह मान

है। इसका उक्त समीकरण में य के स्थान में उत्थापन से—

७ × ४ + ३ = २ × ४ + २३, अथवा, २८ + ३ = ८ + २३ अर्थात् ३१ = ३१ ।

(ख) १२ य − २१ = ३ य + ३३ इस में य का मान क्या है ?

यहाँ ३ के अपवर्तन से ∴ ४य − ७ = य + ११

पक्षान्तरानयन से ∴ ४य − य = ११ + ७

योग करने से ∴ ३ य = १८

भाग देने से ∴ $य = \frac{१८}{३} = ६$

(ग) ११ य − (१३ − य) = ९५ ; इसमें य का मान क्या है ?

कोष्ठ को उड़ा देने से—

११ य − १३ + य = ९५

१२ य = ९५ + १३ = १०८

भाग देने से, $य = \frac{१०८}{१२} = ९$ ।

(घ) ५ (य − ३) − ५१ = ५६ − २ (१७ − २ य)
इसमें य का मान क्या है ?

यहाँ कोष्ठ के आदि के पद से भीतर के पदों को गुणा देने से—
(५ य − १५) − ५१ = ५६ − (३४ − ४ य) कोष्ठ को हटाने से—

५ य − १५ − ५१ = ५६ − ३४ + ४ य, पक्षान्तरानयन से—
५ य − ४ य = ५६ − ३४ + १५ + ५१,
∴ य = १२५ − ३४ = ९१ ।

(च) क य − अ = ग − घ य ; य का क्या मान है ?

पक्षान्तरानयन से, क य + घ य = अ ग

∴ (क + घ) य = अ + ग और य = $\frac{\text{अ + ग}}{\text{क + घ}}$ ।

(छ) $\frac{\text{य}}{२} - \frac{\text{५ य}}{३} - \frac{४}{३} = \frac{\text{४ य}}{३}$ −३ ; य का मान जानना है—

२×३ या ६ से पक्षों को गुणा, ३य−१० य — ८ = ८य−१८

पक्षान्तरानयन से · · ३य−१०य−८य=८−१८

योग करने से · · −१५य = — १०

— १५ का भाग देने से, य = $\frac{-१०}{-१५} = \frac{२}{३}$ ।

(ज) $\frac{\text{४ य}}{३} - \frac{\text{२ य}}{१०} + \frac{\text{य}}{६}$ = ३९ य का मान क्या है ?

यहां ३, १०, ६ का लघुतमापवर्त्य ३० है । प्रत्येक पद को ३० से गुणा—

∴ ३० × $\frac{\text{४ य}}{३}$ = १० × ४ य = ४० य,

३० × $\frac{\text{− २ य}}{१०}$ = − ६ य, ३० × $\frac{\text{य}}{६}$ = ५ य और ३० × ३९ = ११७०

∴ ४० य − ६ य + ५ य = ११७०

योग करने से · · ३९य = ११७०

३९ का भाग देने से या = $\frac{११७०}{३९}$ = ३० ।

इसी प्रकार अनेक उदाहरण हो सकते हैं । इसका बड़ा विस्तार

है जैसी कि ऊपर एकघात एकवर्ण-समीकरण की रीति दिखलाई है, ऐसी ही रीति से वर्गसमीकरण, मध्यमाहरण के उदाहरण भी करना चाहिए।

(क) $३य^२ - २ = २ य^२ + २$ इस वर्गसमीकरण में य का क्या मान है—

पक्षान्तरानयन से ∴ $३ य^२ - २ य^२ = २ + २$

योग करने से ∴ $य^२ = ४$

वर्गमूल लेने से ∴ $य = \sqrt{४} = \pm २$ ।

(प) $य^२ + ६ य = १६$ इस में य का मान क्या है ?

यहाँ वर्गपूर्ति के लिए ६ का आधा ३ का वर्ग ९ दोनों पक्ष में जोड़ने से हुआ—

$य^२ + ६ य + ९ = १६ + ९ = २५$ या $(य + ३)^२ = २५$ दोनों पक्षों का वर्गमूल — $य + ३ = ५$

∴ $य = २$ यहाँ य का दो प्रकार का मान हो सकता है। क्योंकि २५ का मूल — ५ और + ५ होगा, इसी से $य + ३ = - ५$ भी होना संभव है।

∴ $य = - ८$ इससे य का मान २ किंवा, $- ८$ होगा।

(फ) $\frac{य+१}{य-१} - \frac{य-१}{य+१}$; इसमें य का मान क्या है ?

छेदगमार्थ दोनों पक्षों को $(य - १)$ $(य + १)$ से गुणा तो—

$(य+१)^२ - (य-१)^२ = (य-१)(य+१)$ ।

अथवा, $य^२ + २य + १ - य^२ + २ \quad - १ = य^२ - १$ ।

पक्षान्तरानयन और योग से, $य^२ - ४ य = १$ । दोनों पक्षों में $(\frac{४}{२})^२$ या ४ जोड़ा तो $य^२ - ४ य + ४ = ५$ पक्षों का मूल लिया, $य - २ = \pm \sqrt{५}$ अतः पक्षान्तरानयन से, $य = \pm \sqrt{५}$ ।

परिशिष्ट (२)

(१) अब सम्बन्ध या, निष्पत्ति, अनुपात, स्थिर-राशि और चल-राशि के विषय में आवश्यक बातें लिखी जाती हैं।

सजातीय बड़ी और छोटी राशियों में यह सम्बन्ध ज्ञात करते हैं कि बड़ी राशि में छोटी राशि कितनी है अर्थात् छोटी राशि बड़ी राशि का कौन सा भाग है, तो इस भाग को छोटी और बड़ी राशियों का सम्बन्ध कहते हैं। इससे यह मालूम होता है कि जब दो राशियों में सम्बन्ध खोजना हो, तो पहली राशि में दूसरी राशि का भाग देने से जो लब्धि मिले वही इष्ट सम्बन्ध है। जैसे ६ और ३ में सम्बन्ध है तो ६ ÷ ३ = ३, यही अङ्क ६ और ३ का सम्बन्ध हुआ अर्थात् ६ में ३ संख्या ३ बार है। ऐसे ही ३ और ६ में सम्बन्ध, ३ ÷ ६ = $\frac{१}{३}$ यह है अर्थात् ६ का ३ तृतीयांश है।

इसी प्रकार, $\frac{अ}{क}$ इससे अ, क का सम्बन्ध ज्ञात होता है और इन दोनों वर्णों के स्थान में इष्ट संख्या मान सकते हैं। जब दो राशियों का सम्बन्ध प्रकट करना होता है, तो उसको अ : क या, $\frac{अ}{क}$ इस प्रकार लिखते हैं। इसलिए अ : क = $\frac{अ}{क}$ दोनों का एक ही अर्थ है।

ऐसे ही, ग : घ = $\frac{ग}{घ}$; यदि अ, क राशियों का सम्बन्ध और ग, घ का सम्बन्ध समान हो, अर्थात्—

अ : क = ग : घ या $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$, तो ऐसे दो सम्बन्धों की समता को अनुपात कहते हैं। उसको इस प्रकार लिखते हैं—

अ : क : : ग : घ : क्योंकि $\frac{२}{३} = \frac{४}{६}$ ।

∴ २ : ३ : : ४ : ६ अर्थात् २ और ३ में जो सम्बन्ध है वही ४ और ६ में है और २, ३, ४ और ६ इनको अनुपातीय अवयव कहते हैं । जिन राशियों का सम्बन्ध हो, उनको भिन्न-रूप में कर लेने से वही सम्बन्ध का मापक होगा । जैसे, अ : क को $\frac{अ}{क}$ । और अनुपात को उसके समीकरण का रूप देना चाहिए ।

जैसा, अ : क : : ग : घ, इसको $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$, लिखते हैं ।

सम्बन्ध के भिन्नरूप से जो क्रिया हो सकती है, वही सम्बन्ध पर और अनुपात को जो समीकरण के रूप में लिखते हैं, इससे समीकरण सम्बन्धी क्रिया अनुपात पर हो सकती है ।

उदाहरण—७ : ४ यह एक सम्बन्ध है और ८ : ५ यह दूसरा है, इनमें कौन सा सम्बन्ध बड़ा है ?

$$७ : ४ \text{ का } \frac{७}{४} \text{ मापक है ।}$$
$$८ : ५ \text{ का } \frac{८}{५} \text{ मापक है ।}$$

$\frac{७}{४}$ । $\frac{८}{५}$ समच्छेद से $\frac{३५}{२०}$, $\frac{३२}{२०}$ । परन्तु $\frac{३५}{७} = \frac{३२}{२०} + \frac{३}{२०}$, इसलिए $\frac{३५}{२०}$ या, $\frac{७}{४}$ यह $\frac{३२}{२०}$ या, $\frac{८}{५}$ से बड़ा है — ७ : ४ > ८ : ५ ।

(२) यदि सम्बन्ध के पदों को एक राशि से गुणित किंवा भाजित करें तो भी सम्बन्ध-मान में अन्तर नहीं पड़ता ।

यदि, अ : क : : ग : घ;

∴ अ घ = क ग । क्योंकि,

अ : क : : ग : घ या, $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ इन तुल्य राशियों को क घ से गुणा किया तो—

$\frac{अकघ}{क} = \frac{गकघ}{घ}$ । परन्तु $अकघ = क \cdot अघ$ और $गकघ = घ \cdot कग$,

$\therefore \frac{क \cdot अघ}{क} = \frac{घ \cdot कग}{घ}$ अथवा, $अघ = कग$ ।

अब यदि $अघ = कग$ है, तो कघ का भाग देने से—

$\frac{अघ}{कघ} = \frac{कग}{कघ}$, अथवा, $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ या, अ : क : : ग : घ।

और, अ : क : : ग : य, तो पूर्व रीति से $अय = कग$,

अ का भाग देने से, $य = \frac{कग}{अ}$, यह त्रैराशिक उपपन्न हुआ ।

इस प्रकार, त्रैराशिक के तीन पद अनुपातीय मालूम होते हैं, तो चौथा पद भी ज्ञात हो जाता है। क्षेत्रमिति के पाँचवें अध्याय में जो अनुपात की परिभाषा मानी गई है, उसके और बीजगणित के अनुसार अनुपातीय राशियों को सिद्ध करने में कोई भेद नहीं है। पूर्व लिखी हुई निष्पत्तियों में क्रम, उत्क्रम और एकान्तर आदि राशियों के सम्बन्ध-विस्तार करने से सब बातें स्पष्ट प्रतीत होंगी।

(३) यदि किसी राशि के कई अलग अलग मान होते हैं, तो ऐसी राशि को चलराशि कहते हैं। और यदि एक राशि का एक ही मान हो, तो ऐसी राशि को स्थिरराशि कहते हैं।

जब इन राशियों में ऐसा सम्बन्ध हो कि पहली राशि जितनी गुनी बढ़ जाय उतनी गुनी ही दूसरी भी बढ़ जाय अथवा, दोनों राशि आपस में उतनी ही गुनी घट जायँ, तो ऐसे सम्बन्ध को 'अनुलोम-चलन' कहते हैं। यदि अ, क दो राशियों में अनुलोम-चलन हो और अ राशि क के समान हो जाय और क राशि घ राशि के समान हो जाय तो—अ : क : : क : घ ।

और जहाँ एक राशि का मान, अधिक वा न्यून होने से दूसरी अर्थात् उसकी अधीन राशि का मान न्यून वा अधिक होता है,

उसको 'विलोमचलन' कहते हैं। दो राशियों के बीच $\propto$ ऐसा चिह्न उनका चलनसंबन्ध सूचित करता है। जैसा, र $\propto$ य, यदि य = २ और र = २० तो जब र का मान २० है तो य का मान २ है, इसलिए दोनों के बीच क्रम चलन (रूपान्तर) है।

$$\therefore \text{र} : २० :: \text{य} : २,$$

अथवा—

$$\text{र} : \text{य} :: १० : १.$$

(४) यदि दो चलराशियों में चलन का सम्बन्ध हो और राशियों के मान व्यक्त हों, तो चलन का समीकरणस्वरूप इस प्रकार हो सकता है—

अ $\propto$ क, चलन से रूपान्तर—

अ = ग और क = घ तो अ : ग : : क : घ

$\therefore$ अ घ = ग क, घ का भाग देने से—

$$\text{अ} = \frac{\text{ग क}}{\text{घ}} = \frac{\text{ग}}{\text{घ}} . \text{क} ।$$

इस प्रकार यदि र $\propto$ य, तो मान लिया, य = १ र = ३ है, चलन से रूपान्तर—

$$\text{र} : ३ :: \text{य} : १$$

$$\therefore \text{र} = ३ \text{ य};$$

यदि अ, क में अनुलोम-चलन हो, तो $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ यह सम्बन्ध सदा एकसा बना रहेगा, क्योंकि भिन्न के अंश, हर को एक राशि से गुणने वा, भाग देने से उसके मान में अन्तर नहीं पड़ता अर्थात् $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ यह स्थिर राशि होगी, यह अ और क के क्रम-चलन से न बदलेगी, इस कारण $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ के स्थान में म या, न कोई अक्षर रख लेते हैं।

$\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ = म, या अ = म क ।

यदि ग ∝ घ के बीच उक्त चलन हो तो $\frac{\text{ग}}{\text{घ}}$, यह स्थिर राशि ही बनी रहेगी। परंतु ग, घ के चलन होने से $\frac{\text{ग}}{\text{घ}}$, यह राशि $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ राशी के समान न हो जायगी। इसलिए $\frac{\text{ग}}{\text{घ}}$ को न के समान मान लेना होगा, क्योंकि म = $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ है और यहाँ ग = न घ; यह स्वरूप होता है।

इसी प्रकार, विलोम-चलन के भी सम्बन्धों का स्वरूप और समीकरण उदाहरणों से सविस्तर जानना चाहिए।

योगज और अन्तर श्रेढी।

(१) श्रेढी शब्द का अर्थ पंक्ति है। जब एक पंक्ति में राशियाँ इस क्रम से हों कि प्रत्येक पास की दो राशियों के बीच समान अन्तर हो और वह अन्तर समान रूप से बढ़ता हो या, उसी क्रम से घटता हो तो ऐसी श्रेढी को क्रम से योगज और अन्तर श्रेढी कहते हैं।

श्रेढी के प्रथम पद को आदि या, मुख और सबसे पीछे के पद को अन्त पद एवं प्रत्येक दो राशियों के बीच जो समान अन्तर है, उसको चय कहते हैं। आदि और अन्त पद के बीच जितने पद हों, उनको मध्यपद और पदों की संख्या को गच्छ एवं श्रेढी के सब पदों के योग को श्रेढी फल कहते हैं।

जैसा, १, ३, ५, ७, ९, ११ .... आदि, योगज श्रेढी है, क्योंकि प्रत्येक दो पास के पदों में पहले से दूसरा २ के समान बड़ा है। और २०, १९, १८, १७ इस पंक्ति में पहले से दूसरा १ के समान छोटा है, यह अन्तरश्रेढी है।

यदि श्रेढी का आदि पद = अ, चय = च,

अ, अ + च, अ + २ च, अ + ३ च आदि योगश्रेढी ।

अ, अ − च, अ − २ च, अ − ३ च आदि अन्तरश्रेढी ।

अब, अ, अ + च, अ + २ च, अ + ३ च........श्रेढी में अ आदिपद, ऐसे ही आगे के पद हैं । इससे यह बात निकलती है कि जो 'स' को श्रेढी के किसी पद की संख्या मानें तो सौवें स्थान का पद अ + (स − १) च; इसके तुल्य होगा । इसका कारण यह है कि यदि स को १ मानें और पहला पद सिद्ध करें, तो अ + (स − १) च ; इसमें स के स्थान में १ मानें तो प्रथम पद अ हुआ । क्योंकि—

अ + (१ − १) च = अ + ० × च = अ + ० = अ ।

इसी प्रकार, दूसरे पद के लिए स के स्थान में २ रक्खा तो अ + च, यह हुआ । क्योंकि, अ + (२ − १) च = अ + १ × च = अ + च । ऐसे ही क्रिया होती है । अन्तरश्रेढी में सौवें स्थान का पद अ − (स − १) च यह होगा, इस पर क्रिया बढ़ानी चाहिए । यहाँ यह भी ज्ञात हुआ कि यदि आदि पद और चय मालूम हो तो श्रेढी का अभीष्ट पद निकल सकता है ।

जैसा,

१, ५, ९, १३, १७ .... श्रेढी का पचासवाँ पद ज्ञात करना है । यह योगज श्रेढी है इसलिए अ + (स − १) च, में स के स्थान में ५० माना और अ के स्थान में १ और च के स्थान में ५ − १ या, ४ रक्खा तो—

१ + (५० − १) ४ = १ + २०० − ४ = १९७ यही श्रेढी का पचासवाँ पद हुआ ।

उपपत्ति ।

(२) अ = आदि पद, च = चय और प = अन्त्य पद है, तो—

अ, अ + च, + २ च, अ + ३ च + आदि......... + प, यह श्रेढी का स्वरूप हुआ और कल्पना किया कि श्रेढी के पदों का

योग = य है, तो य = अ + अ + च + अ + २ च + अ + ३ च + आदि – + य । श्रेढी के पास के प्रत्येक पदों के बीच च अन्तर समान है और योगज श्रेढी में प अन्तिम पद है। इसलिए प – च पद इसके पूर्व होगा और इसके पूर्व प – २ च यह पद होगा। ऐसे ही अन्य पद भी होंगे। अब इन पदों को उत्क्रम से लिखा——

य = प + प – च + प – २ च + आदि......अ + च + अ;

और, य = अ + अ + च + अ + २च + आदि......प – च + प;

इनका योग करने से——

२ य = अ + प + अ + प + अ + प + आदि........ अ + प + अ + प । श्रेढी में जितने पद होंगे उतने ही बार अ + प आवेगा।

और यदि ग को गच्छ या, पदों की संख्या मानें, तो——

२ य = ग बार अ + प या, ग × (अ + प) ।

इस कारण य = $\frac{१}{२}$ ग (अ + प) ऐसे ही जो अन्तरश्रेढी हो तो भी श्रेढीफल अथवा, य = $\frac{१}{२}$ ग (अ + प) ।

केवल अन्तरश्रेढी में योगजश्रेढी की अपेक्षा + च के स्थान में – च होगा और उत्क्रमअन्तरश्रेढी में – च के स्थान में + च होगा। इसका कारण यह है कि अन्तरश्रेढी में कोई पद, जैसा प, पूर्व पद से च के समान छोटा होगा। इसलिए अन्तरश्रेढीफल य = अ, अ – च, अ – २ च, अ – ३ च, + आदि......+ प ।

यदि अ, क दो राशियों के बीच मध्यपद निकालना हो अर्थात् यदि उन तीन राशियों को क्रम से रक्खें तो उनमें प्रत्येक पास की दो राशियों के बीच समान अन्तर हो।

यदि य, ऐसी राशि है, तो अ, य, क ये श्रेढीपद होंगे और जो योगजश्रेढी होगी तो य – अ, चय होगा और क – य भी चय होगा।

∴ य – अ = क – य ;

पक्षान्तरानयन से—

२ य = अ + क, २ का भाग देने से, य+ $\frac{अ + क}{२}$ ।

इससे सिद्ध होता है कि योगज किंवा अन्तरश्रेढी की दो राशियों के बीच मध्यपद निकालना हो तो दोनों राशियों का आधा योग—इष्ट मध्यपद होगा। आचार्य ने भी लीलावती में '....मुख-युग्दलितं तन्मध्यधनम्।' इत्यादि लिखा है।

इसी प्रकार गुणोत्तरश्रेढी वा, घातश्रेढी का भी प्रपंच है।

× × ×

पाश्चात्य बीज में चित्र (क्षेत्र) Graph द्वारा प्रश्नों का विचार है, उससे राशियों का मान निकालना, अव्यक्त राशियों को ज्ञात करना आदि और क्षेत्रमिति सम्बन्धी प्रश्न, जैसे त्रिभुज, चतुर्भुजों का क्षेत्रफल, दो स्थानों की दूरी मालूम करना इत्यादि का बहुत बड़ा प्रपञ्च है। वह सब यहाँ नहीं लिखा। आचार्य ने एकवर्ण-मध्यमाहरण के अन्त में 'क्षेत्रे तिथिनखैस्तुल्ये'— इस उदाहरण के प्रसङ्ग से कोष्ठात्मक क्षेत्रों की कल्पना पर राशियों का मान निकालने का दिग्दर्शन किया है। इसी मूल ने पाश्चात्य बीज में विशाल रूप धारण किया है, जो वास्तव में ज्ञेय और माननीय है।

इति शिवम्।

परिशिष्ट (३)

बीजगणित-सम्बन्धी कतिपय पाश्चात्य पारिभाषिक शब्दों के नाम—

बीजगणित	Algebra.
संकलन	Addition.
व्यवकलन	Subtraction.
गुणन	Multiplication.
भजन	Division.
वर्ग	Square.
वर्गमूल	Square-root.
घन	Cube.
घनमूल	Cube-root.
घातक्रिया	Involution.
घातमापक	Index of power. (Coefficient of power.)
महत्तमापवर्तन	Greatest Common Measure G. C. M.)
लघुतमापवर्त्य	Lowest Common Multiple L. C. M.)
अपवर्तन	Common Factor.
अव्यक्त राशि	Unknown quantity.
भिन्न	Fraction.
अंश	Numerator.
हर	Denominator.
पूर्णाङ्क	Whole Number.
दशमलव	Decimal Fraction.
त्रैराशिक	Rule of Three.
व्यस्त त्रैराशिक	Inverse Rule of Three.
पञ्चराशिक	Double Rule of Three.
मूलधन	Principal.
मिश्रधन	Amount (Arithmetic).
कलान्तर	Interest.

करणी	Surds
करणीगत-राशि	Radical quantity.
श्रेढी (योगान्तर)	Arithmetical Progression.
श्रेढी (गुणोत्तर)	Geometrical Progression.
क्षेत्र	Figure.
क्षेत्रफल	Area.
वृत्त	Circle.
परिधि	Circumference.
व्यास	Diameter.
त्रिज्या	Radius.
घनफल	Volume.
कुट्टक	Pulverizer. (Indeterminate Multiple).
समीकरण	Equation.
एकवर्ण-समीकरण	Simple Equation.
,, (मध्यमाहरण)	Adfected Quadratic Equation.
अनेकवर्ण-समीकरण	Equation containing more than one unknown quantity.
,, (मध्यमाहरण)	Equation containing quadratic.
राशि (धन)	Positive quantity.
राशि (ऋण)	Negative quantity.
उत्थापन	Substitution.
पक्षान्तरानयन	Transposition.
सम्बन्ध, निष्पत्ति	Ratio.
अनुपात	Proportion.
त्रिभुज	Triangle.
चतुर्भुज	Quadrilateral.
वर्गक्षेत्र	Square.